

考虑界面摩阻的加筋垫层状态空间分析方法

王金昌¹,高钰¹,郑直²,段冰³,黄伟明⁴

(1. 浙江大学建筑工程学院,浙江 杭州 310058;2. 大连海事大学交通运输工程学院,辽宁 大连 116026;
3. 浙江省数智交院科技股份有限公司,浙江 杭州 310058;4. 温州大学建筑工程学院,浙江 温州 325035)

摘要 目的 快速求解加筋垫层的力学响应,为加筋垫层的设计提供一种新的解析分析方法。方法 基于 Euler-Bernoulli 梁理论,将加筋垫层视作 Winkler 地基上的欧拉直梁,考虑加筋垫层顶部与底部接触界面的摩阻作用,建立在任意竖向荷载作用下加筋垫层静力响应问题的状态空间方程;通过与已有文献、有限元的计算结果对比,验证解析方法的有效性。结果 界面摩阻作用能减小加筋垫层的变形,且其对集中荷载作用点的变形影响较大;增大垫层的厚度与弹性模量可以减小结构的变形,但随着数值的增大,减小的效果逐渐减弱;垫层的厚度与弹性模量仅对集中荷载作用点的变形影响较大,而地基反力系数对所有位置的竖向位移及集中荷载作用处的截面转角影响均较大。结论 界面摩阻对集中荷载作用处的变形影响较大,在计算分析时不能忽略;在实际工程中,可通过选择合适的弹性模量和厚度、提高地基反力来减小结构变形。

关键词 道路工程;加筋垫层;Euler-Bernoulli 梁理论;界面摩阻;状态空间法

中图分类号 TU471.2;U416.1

文献标志码 A

State-space Analysis Method for the Reinforced Cushion Considering Interfacial Friction

WANG Jinchang¹, GAO Yu¹, ZHENG Zhi², DUAN Bing³, HUANG Weiming⁴

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou, China, 310058; 2. School of Transportation Engineering, Dalian Maritime University, Dalian, China, 116026; 3. Zhejiang Institute of Communication Co. Ltd., Hangzhou, China, 310058; 4. College of Architecture and Civil Engineering, Wenzhou University, Wenzhou, China, 325035)

Abstract: To quickly solve the responses of reinforced cushions, a new analytical method was proposed based on the Euler-Bernoulli beam theory. The reinforced cushion was simplified as a

收稿日期:2022-10-19

基金项目:国家自然科学基金青年基金项目(52108341);浙江省交通运输厅项目(ZJXL-JTT-202201A)

作者简介:王金昌(1974—),男,副教授,博士,主要从事交通基础设施和地下工程等方面研究。

beam on the Winkler foundation. A state equation was established for analyzing responses of the reinforced cushion considering the interfacial friction under the action of an arbitrary vertical load, and solved according to matrix theory. The solution was verified by a comparison with the results of the finite element and existing literature. The parameter analyses showed that the interfacial friction has a great influence on the deformation near the point of the concentrated load. Thus, interfacial friction could not be ignored. The settlement and bending deformation of the reinforced cushion are reduced by increasing the thickness and elastics of the reinforced cushion. The foundation reaction coefficient has a significant influence on the settlement at all positions and the rotational angle of the section at the concentrated load point.

Key words: road engineering; reinforced cushion; Euler-Bernoulli beam theory; interfacial friction; state-space method

加筋垫层是在碎石垫层中水平铺设土工格室或土工格栅等材料所形成的复合垫层。土工合成材料具有抗拉强度高、连锁作用强与变形模量大等优点,将其铺设在碎石材料中起到强化散体颗粒之间连接的作用,从而形成一个强度很高的复合体系,使得路堤结构的整体强度和稳定性大幅度提高。目前,加筋垫层已广泛应用于软土地基上高速公路路堤的加固工程^[1-4]。

在对加筋垫层进行理论分析时,考虑到土工加筋体与碎石颗粒的咬合作用较强,且二者之间的界面参数不宜测定,通常将其简化为弹性地基上的梁。边学成等^[5]建立了考虑路基填料和地基土体剪切作用的加筋体简化分析模型,得到了路面荷载作用下加筋体的弯矩和剪力分布。YIN Jianhua 等^[6-7]基于弹性地基梁理论,建立了加筋结构与土相互作用分析模型,分析了加筋体抗剪强度对沉降的影响。但上述研究只考虑了加筋体与土体的竖向相互作用,未考虑横向摩阻的影响。张福海等^[8]研究表明,加筋垫层可通过水平摩阻力改善路堤的内力和变形分布,从而减少水平变形以及不均匀沉降,故不能忽略水平摩阻力的影响。赵明华等^[9-10]建立了考虑水平摩阻力影响的加筋体的挠曲变形微分方程,并给出了其幂级数解答。HUANG Weiming 等^[11]考虑垫层和土工材料之间的界面摩阻力,建立了土工加筋复合

地基的平面模型,求出路堤沉降。但文献[9-11]只考虑了界面摩阻力对拉力的影响,而忽略了其因梁体厚度产生的弯矩效应。

状态空间法基于对偶理论和状态辛空间,通过将能量共轭的两类物理量如位移和内力一同作为状态变量,避免了高阶微分方程的求解,简化了复杂问题的求解过程,具有物理概念清晰、计算效率高的特点。目前,状态空间法已被广泛应用于工程领域,如隧道衬砌内力计算^[12-14]、地基处理结构分析^[15]、多层土体中的桩身水平荷载响应^[16]以及复合梁柱的内力计算^[17]等,但在土工加筋垫层计算中的应用还尚未见诸于报道。

综上所述,笔者提出一种加筋垫层的状态空间分析方法,该方法用弹性地基上的单层欧拉直梁模拟加筋垫层,基于 Euler-Bernoulli 直梁理论,导出考虑接触界面(包括加筋垫层的顶部和底部)水平摩阻力的加筋垫层响应的状态方程,再利用矩阵理论得到方程的解,最终求得结构任意截面的变形与内力。研究表明:笔者所提方法适用的加筋垫层为多层钢塑土工格栅加筋垫层以及土工格室垫层,笔者求得的解析解适用于任意形式的竖向荷载,具有形式简洁、计算效率高等优点。

1 问题描述

加筋材料与碎石垫层相互作用,产生附加黏聚力,从而将二者构成一个具有较高抗

拉、抗剪与抗弯强度的复合体系,故笔者将加筋垫层视作 Winkler 地基上的单层欧拉直梁。基于 Winkler 地基模型,建立起综合考虑加筋垫层顶部与顶部接触界面摩擦阻的分析模型,如图 1 所示。图中, p 为加筋垫层承受的上部荷载, h 为加筋垫层的厚度。

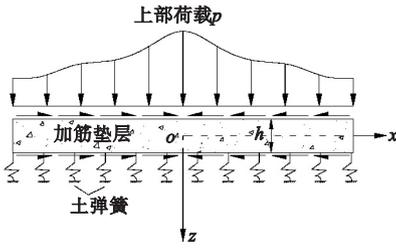


图 1 加筋垫层的分析模型

Fig. 1 The analytical model of reinforced cushion

2 加筋垫层分析模型

2.1 基本假定

由于模型左右完全对称,故只取右半部分进行分析。沿梁轴线方向建立坐标 x 轴,沿垂直于梁轴线方向建立坐标 z 轴。取一微元体进行受力分析,如图 2 所示。图中, q_z 为地基的竖向反力; f_1 和 f_2 分别为加筋垫层顶部与底部的水平摩擦阻力; E 为弹性模量; I 为截面的抗弯惯性矩; A 为截面积; M 、 Q 和 N 分别为弯矩、剪力和轴力,它们的正方向如图 2 所示; w 为竖向位移, v 为水平位移, φ 为截面的转角,其中 w 以向下为正, v 以向右为正, φ 以顺时针为正。

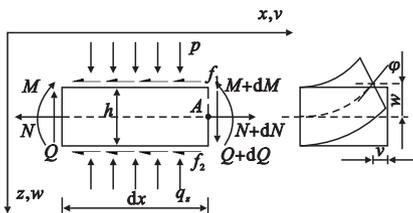


图 2 梁单元体受力分析图

Fig. 2 Force analysis diagram of the beam

基本假定:①材料为线弹性材料;②结构处于小变形状态;③采用 Euler-Bernoulli 梁模拟加筋垫层;④采用 Winkler 弹簧模拟加筋垫层与地基土之间的相互作用;⑤加筋垫

层上、下接触界面的摩擦阻力与其水平位移呈线性关系。

2.2 状态方程的推导及求解

根据 Euler-Bernoulli 梁理论与图 2 的位移关系,截面上任意一点的水平位移 v 可表示为

$$v(x, z) = v(x) - z\varphi. \tag{1}$$

$$\varphi = \frac{dw}{dx}. \tag{2}$$

截面上的弯矩和轴力可分别表示为

$$M = - \iint_A \sigma_s z dA = EI\kappa = EI \frac{d\varphi}{dx}. \tag{3}$$

$$N = \iint_A \sigma_s dA = EA\varepsilon = EA \frac{dv}{dx}. \tag{4}$$

建立梁在竖直方向上的平衡方程为

$$\frac{dQ}{dx} = q_z - p. \tag{5}$$

式中: $q_z = -k_s w$, k_s 代表地基土的竖向反力模量,负号表示位移与反力的方向相反。

建立梁在水平方向上的平衡方程为

$$\frac{dN}{dx} = f_1 + f_2. \tag{6}$$

对图 2 中的点 A 取矩,并略去二阶微分的影响,则有:

$$\frac{dM}{dx} = Q + (f_2 - f_1) \frac{h}{2}. \tag{7}$$

$$f_1 = -k_1 u = -k_1 \left(v + \frac{h}{2} \cdot \frac{dw}{dx} \right) = -k_1 \left(v + \frac{h}{2} \cdot \varphi \right). \tag{8}$$

$$f_2 = -k_2 u = -k_2 \left(v - \frac{h}{2} \cdot \frac{dw}{dx} \right) = -k_2 \left(v - \frac{h}{2} \cdot \varphi \right). \tag{9}$$

式中: k_1 和 k_2 分别为梁上、下接触面土体的水平向地基反力系数。

将式(2)~(5)和式(7)整理成矩阵形式,建立起无量纲的状态方程:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{q}. \tag{10}$$

式中: \bar{x} 为无量纲的状态向量,由 3 个位移量和与其能量共轭的 3 个内力量组成:

$$\bar{x} = [\bar{w} \quad \bar{v} \quad \bar{\varphi} \quad \bar{Q} \quad \bar{N} \quad \bar{M}]^T. \quad (11)$$

\bar{q} 是无量纲的外荷载向量:

$$\bar{q} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -\bar{p} \quad 0 \quad 0]^T. \quad (12)$$

\bar{A} 是无量纲的状态方程的系统矩阵:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{C} \\ \bar{D} & \bar{B}^T \end{bmatrix}. \quad (13)$$

$$\text{其中, } \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I} \end{bmatrix},$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} -\bar{k}_z & 0 & 0 \\ 0 & -(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) & \frac{\bar{h}}{2}(\bar{k}_2 - \bar{k}_1) \\ 0 & \frac{\bar{h}}{2}(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) & \frac{\bar{h}^2}{4}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) \end{bmatrix}.$$

上述式中无量纲的内力、位移以及坐标

等其他量分别为: $\bar{w} = \frac{w}{L}$, $\bar{x} = \frac{x}{L}$,

$$\bar{M} = \frac{M}{EAL}, \bar{k}_z = \frac{k_z L^2}{EA}, \bar{k}_1 = \frac{k_1 L^2}{EA}, \bar{k}_2 = \frac{k_2 L^2}{EA}, \bar{p} = \frac{pL}{EA},$$

$$\bar{v} = \frac{v}{L}, \bar{q}_z = \frac{q_z L}{EA}, \bar{Q} = \frac{Q}{EA}, \bar{I} = \frac{I}{AL^2}.$$

根据矩阵理论可得,式(10)的标准解为

$$\bar{x}(\bar{x}) = \bar{T}(\bar{x} - \bar{x}_0)\bar{x}_0 + \bar{f}(\bar{x} - \bar{x}_0). \quad (14)$$

式中: \bar{x}_0 为梁始端的状态向量,表示 $\bar{x} = \bar{x}_0$ 时状态向量 \bar{x} 的值; $\bar{T}(\bar{x} - \bar{x}_0)$ 为从 \bar{x}_0 到 \bar{x} 的传递矩阵; $\bar{f}(\bar{x} - \bar{x}_0)$ 为从 \bar{x}_0 到 \bar{x} 的荷载积分向量。

当式(14)取 $\bar{x} = \bar{x}_1$ 时,便可得到单个直梁段两端状态向量 \bar{x}_0 和 \bar{x}_1 之间的矩阵传递关系,即:

$$\bar{x}_1 = \bar{x}(\bar{x}_1) = \bar{T}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)\bar{x}_0 + \bar{f}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0). \quad (15)$$

式(10)中有 12 个未知数,但只有 6 个方程,因此需要补充 6 个边界条件:

$$\begin{cases} v_0^{(1)} = 0, \\ \varphi_0^{(1)} = 0, \\ Q_0^{(1)} = 0, \\ Q_1^{(2n+1)} = 0, \\ N_1^{(2n+1)} = 0, \\ M_1^{(2n+1)} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

将式(16)也整理成矩阵的形式:

$$Lx_1^{(2n+1)} + Kx_0^{(1)} = G. \quad (17)$$

联立式(15)和式(17),即可求出梁始端截面的状态向量,可求得直梁任意截面处的内力和位移。

3 算例验证及参数分析

3.1 解析方法的验证

笔者采用已有文献^[18]中的模型结构参数,分别通过 ABAQUS 和笔者提出的解析方法进行分析,来验证笔者所提解析方法的正确性。文献[18]采用 Galerkin 法迭代求解变形控制微分方程,而笔者采用状态空间法避免高阶微分方程的求解,简化复杂问题,计算效率较高。

加筋垫层受力情况如图 3 所示。具体的模型参数:梁长 $2l = 30 \text{ m}$,高 $h = 0.5 \text{ m}$,弹性模量 $E = 80 \text{ MPa}$,竖向地基反力系数 $k_z = 10 \text{ 000 kN/m}^3$,上表面水平反力系数 $k_1 = 4 \text{ 000 kN/m}^3$,下表面水平反力系数 $k_2 = 5 \text{ 000 kN/m}^3$,在直梁上作用 150 kPa 的均布荷载和 2 个大小为 200 kN 的集中荷载(方向为竖直向下),取梁的一半分析,则集中荷载的作用位置为 $x = 7 \text{ m}$ 处。

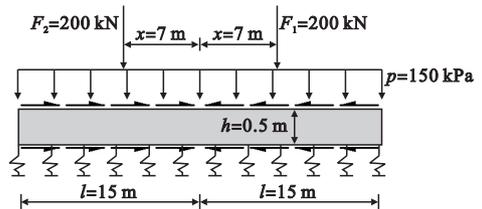


图 3 加筋垫层受力示意图

Fig. 3 The reinforced cushion with loadings

在 ABAQUS 中,采用两结点平面立方单元(B23)对加筋垫层进行模拟,并沿梁全长设置竖向接地弹簧单元(connect points to ground)。由于模型对称,故取一半进行分析,图 4 为笔者所提方法计算结果与 ABAQUS 计算结果和文献[18]中竖向位移、弯矩和剪力计算结果的对比图。由图可知,三者的结果非常接近,验证了笔者方法的正

确性,且笔者所提方法的计算结果与 ABAQUS 的计算结果较为一致,二者最大仅

相差 1.96%,表明采用状态空间法求解更为精确。

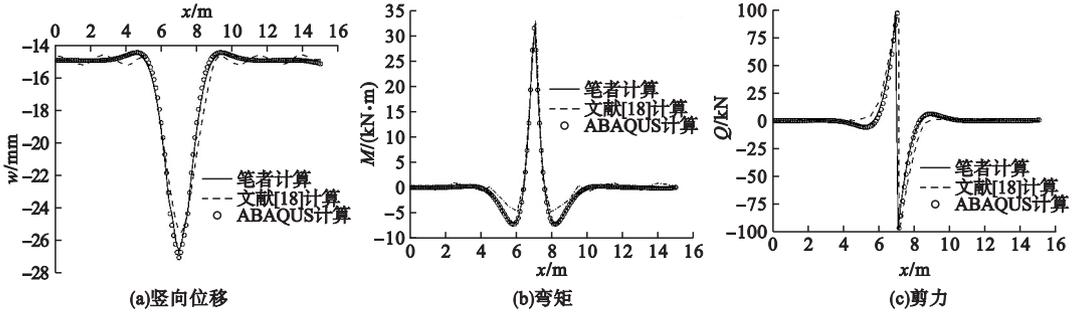


图4 笔者所提方法解析解与文献和数值计算结果对比

Fig. 4 Comparison between the proposed analytical solution and numerical calculation results in the literature

3.2 参数分析

利用笔者所提方法的解析解,分析不同界面摩擦阻、垫层弹性模量、垫层厚度及地基反力系数下加筋垫层变形响应的变化规律。模型参数与 3.1 节中的一致。

3.2.1 界面摩擦阻的影响

令模型中梁上、下接触面土体的水平向地基反力系数等于 0(即 $k_1 = k_2 = 0$),即为不考虑界面摩擦阻的情况,将其与考虑界面摩擦阻

时的计算结果进行对比,如图 5 所示。由图可知,界面摩擦阻对加筋垫层的竖向位移和截面转角均有显著的影响,尤其是集中荷载作用位置,考虑界面摩擦阻时竖向位移减少了 5.69%,截面转角减少了 20.20%。表明界面摩擦阻力能够减小垫层的沉降与弯曲变形,因此,在计算分析中,应考虑加筋垫层上、下接触界面摩擦阻的影响,以更为准确地计算加筋垫层的力学响应。

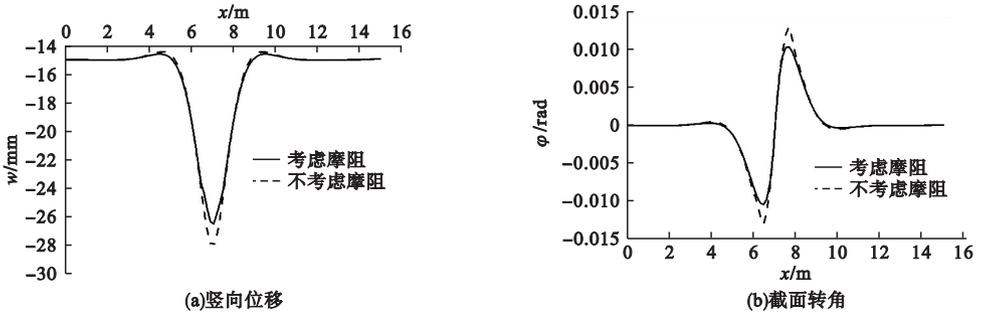


图5 不同界面摩擦阻下加筋垫层的变形响应

Fig. 5 The deformation responses of reinforced cushion under different interface friction resistance

3.2.2 垫层厚度的影响

垫层的厚度对路堤整体的工作性能有较大影响,《公路软土地基路堤设计规范》(DB33/T 904—2021)^[19]中明确指出其厚度不宜小于 0.3 m,若软土指标较差,可适当加厚。本节选取垫层厚度 h 分别为 0.3 m、0.4 m、0.5 m、0.6 m、0.7 m,其余参数保持不变,探究加筋垫层的厚度对其变形响应的影

响。图 6 为不同垫层厚度下竖向位移和截面转角的变化曲线。由图可知,随着垫层厚度增大,竖向位移和截面转角逐渐减小,且垫层厚度的变化对集中荷载作用位置的变形影响较大。对于集中荷载作用位置,当 h 从 0.3 m 增加至 0.5 m 时,竖向变形减小了 20.74%,截面转角减小了 59.44%;当 h 继续增加至 0.7 m 时,竖向位移和截面转角仅分别减少了 5.56% 和 11.85%。

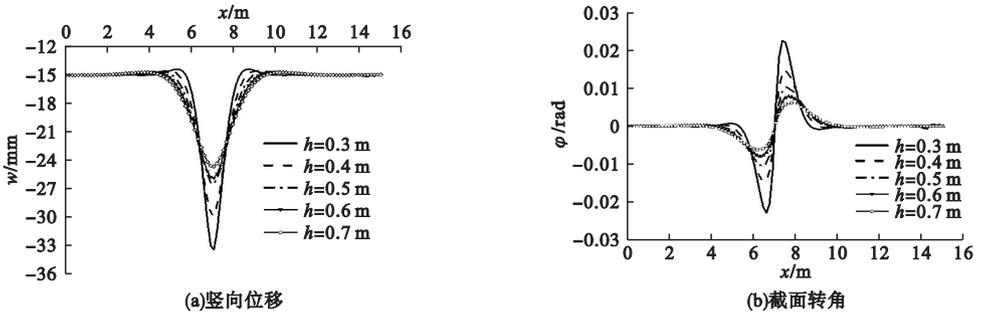


图6 不同厚度下加筋垫层的变形响应

Fig. 6 The deformation responses of reinforced cushion under different thicknesses

综上所述,增加垫层厚度可以减小竖向位移和截面转角,这是由于垫层在路堤结构中起到扩散应力的作用,增加厚度能够使得应力扩散的效果增强。但随着厚度的增大,减小的效果逐渐减弱。因此,在工程中选择合适的垫层厚度以减小结构变形。基于上述分析可得,垫层厚度的最优区间是0.3 ~ 0.5 m。

3.2.3 垫层弹性模量的影响

杨明辉等^[20]通过叠梁试验得出工程中常用的碎石土工格室弹性模量取值范围在50 ~ 70 MPa,土体格室体梁弹性模量在40 ~

65 MPa。故笔者选取加筋垫层的弹性模量 E 分别为 40 MPa、50 MPa、60 MPa、70 MPa、80 MPa,其余参数保持不变,探究弹性模量对加筋垫层变形响应的影响。

图7为不同弹性模量下垫层竖向位移和截面转角的变化曲线。由图可知,随着弹性模量的增大,竖向位移和截面转角逐渐减小,且弹性模量的变化对集中荷载作用位置的变形影响较大。对于集中荷载作用位置,当 E 从40 MPa增加至80 MPa时,竖向位移减小了7.02%,截面转角减小了26.71%。

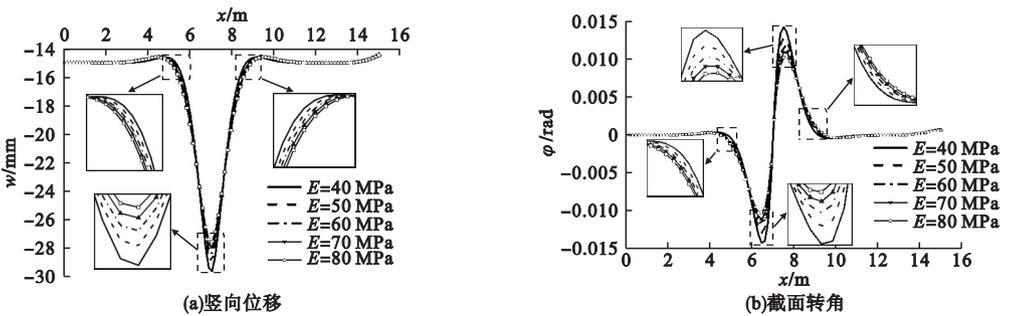


图7 不同弹性模量下加筋垫层的变形响应

Fig. 7 The deformation responses of reinforced cushion under different modulus

综上所述,弹性模量的增大会使结构的整体刚度增大,抗变形能力增强;在相同荷载作用下,结构的竖向位移和截面转角均会有所减小,但加筋垫层为柔性结构,受材料特性的影响,其弹性模量不可无限增加。因此,在工程中可适当增大加筋垫层的弹性模量。

3.2.4 地基反力系数的影响

地基反力系数用以反应地基土的抗变形

能力,可按照荷载试验 $Q-S$ 曲线上割线斜率或地区经验取值。本节选取地基反力系数 k_s 分别为 8 MN/m³、9 MN/m³、10 MN/m³、11 MN/m³、12 MN/m³,其余参数保持不变,探究地基反力系数对加筋垫层变形响应的

影响。图8(a)为不同地基反力系数下垫层竖向变形的变化曲线。由图可知,随着地基反

力系数增大,竖向位移逐渐减小,且对所有位置的竖向位移影响均较大。地基反力系数越大,意味着土体能够提供的竖向反力越大。故在相同荷载作用下,地基反力系数越大,结构产生的竖向位移越小。当 k_s 从 8 MN/m^3 增加至 10 MN/m^3 时,竖向位移减小了20.74%;当 k_s 继续增加至 12 MN/m^3 时,竖向变形最大值仅变化了9.17%。

图8(b)为不同地基反力系数下垫层截面转角的变化曲线。由图可知,随着地基反力系数增大,截面转角逐渐减小,且仅对集中荷载作用处的截面转角影响较大。地基反力系数越大,代表地基土强度越高,即在高强度土体的支撑下加筋垫层不易产生挠曲变形。当 k_s 从 8 MN/m^3 增加至 12 MN/m^3 时,集中荷载作用处的截面转角减小了18.10%。因此,在工程中应适当提高地基土的强度来抑制结构变形。

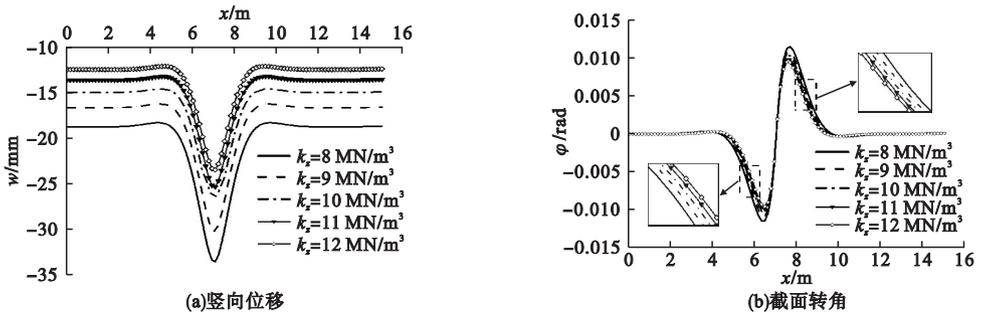


图8 不同地基反力系数下加筋垫层的变形响应

Fig. 8 The deformation responses of reinforced cushion under different foundation reaction coefficients

4 结论

(1) 采用状态空间法针对加筋垫层模型求得的解析解结果精确,且具有简化复杂问题、形式简洁、计算效率高等优势。

(2) 界面摩擦阻作用可以减小加筋垫层的变形,且其对集中荷载作用点处的变形影响较大。因此,在进行理论计算时,应充分考虑加筋垫层顶部和底部接触界面的摩擦阻,以保证计算的准确性。

(3) 增大垫层的厚度与弹性模量可以减小结构的变形,但随着垫层厚度增大,减小效果逐渐减弱,且受材料特性影响,其弹性模量不可无限增加;在实际工程中,应考虑造价等实际情况选择合适的弹性模量和厚度。

(4) 土弹簧对加筋垫层的变形起到抑制作用,随着地基反力系数增大,垫层的竖向变形和转角逐渐减小,且地基反力系数的变化对垫层竖向位移的影响程度大于转角。

参考文献

- [1] 观祖保,杨挺,吴巨贵,等. 土工格栅处治老路拼接的加筋效应分析[J]. 中国公路学报, 2017, 30(6): 215-222.
(GUAN Zubao, YANG Ting, WU Jugui, et al. Reinforced-effect analysis of geogrid treatment in old road widening [J]. China journal of highway and transport, 2017, 30(6): 215-222.)
- [2] 梁程,徐超. 土工格室加筋土垫层路堤临界高度研究[J]. 岩土力学, 2018, 39(8): 2984-2990.
(LIANG Cheng, XU Chao. Study on critical height of reinforced embankments with geocell layer [J]. Rock and soil mechanics, 2018, 39(8): 2984-2990.)
- [3] 刘红军,陶夏新,王丕祥. 弹塑性有限元评价格栅加固公路软土地基效果[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2007, 23(3): 382-386.
(LIU Hongjun, TAO Xiaxin, WANG Pixiang. Elasticity finite element evaluation of the effect of reinforced soft ground for highways [J]. Journal of Shenyang jianzhu university (natural science), 2007, 23(3): 382-386.)
- [4] 汪益敏,闫岑,于恒,等. 静载作用下土工格栅加筋拓宽路堤土中应力特征试验研究[J]. 岩土力学, 2018, 39(增刊1): 311-317.
(WANG Yimin, YAN Cen, YU Heng, et al.

- Experimental study of soil stress characteristics of geogrid-reinforced widened embankment under static loadings [J]. *Rock and soil mechanics*, 2018, 39(S1): 311 - 317.)
- [5] 边学成, 宋广, 陈云敏. Pasternak 地基中土工格室加筋体的受力变形分析[J]. *工程力学*, 2012, 29(5): 147 - 155.
(BIAN Xuecheng, SONG Guang, CHEN Yunmin. Deformation behaviors of geocell reinforcement in Pasternak ground [J]. *Engineering mechanics*, 2012, 29(5): 147 - 155.)
- [6] YIN Jianhua. Comparative modeling study of reinforced beam on elastic foundation [J]. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 2000, 126(3): 265 - 271.
- [7] YIN Jianhua. Closed-form solution for reinforced Timoshenko beam on elastic foundation [J]. *Journal of engineering mechanics*, 2001, 127(12): 1317 - 1317.
- [8] 张福海, 俞仲泉. 平面应变条件下土工格室加筋垫层的变形分析[J]. *岩土力学*, 2005(增刊1): 241 - 243.
(ZHANG Fuhai, YU Zhongquan. Analysis of deformation of geocell reinforced mat under plane strain condition [J]. *Rock and soil mechanics*, 2005(S1): 241 - 243.)
- [9] 赵明华, 张玲, 马缤辉. 基于文克尔假定的土工格室加筋体受力分析[J]. *水利学报*, 2008(6): 697 - 702.
(ZHAO Minghua, ZHANG Ling, MA Binhui. Deformation analysis of geocell reinforcement based on Winkler model [J]. *Journal of hydraulic engineering*, 2008(6): 697 - 702.)
- [10] 赵明华, 张玲, 曹文贵, 等. 基于弹性地基梁理论的土工格室加筋体变形分析[J]. *岩土力学*, 2009, 30(12): 3695 - 3699.
(ZHAO Minghua, ZHANG Ling, CAO Wengui, et al. Deformation analysis of geocell reinforcement based on theory for beam on elastic foundation [J]. *Rock and soil mechanics*, 2009, 30(12): 3695 - 3699.)
- [11] HUANG Weiming, REN Chao, WANG Jinchang, et al. A simplified planar model for geosynthetics reinforced composite foundation subjected to vertical load [J]. *E3S web of conferences*, 2020, 198(11): 01039.
- [12] CHEN Qiuji, WANG Jinchang, HUANG Weiming, et al. Analytical solution for a jointed shield tunnel lining reinforced by secondary linings [J]. *International journal of mechanical sciences*, 2020, 185: 105813.
- [13] WANG Jinchang, HUANG Weiming, XU Rongqiao, et al. Analytical approach for circular-jointed shield tunnel lining based on the state space method [J]. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 2020, 44(5): 575 - 595.
- [14] 王金昌, 范卫洲, 黄伟明. 基于状态空间法的无柱型类矩形隧道分析模型[J]. *沈阳建筑大学学报(自然科学版)*, 2022, 38(2): 193 - 201.
(WANG Jinchang, FAN Weizhou, HUANG Weiming. Structural analysis of non-column quasi-rectangular shield tunnel based on the state space method [J]. *Journal of Shenyang jianzhu university (natural science)*, 2022, 38(2): 193 - 201.)
- [15] 盛宏玉, 高荣誉. 一种改进的 Pasternak 地基模型及层合地基板的解析解[J]. *土木工程学报*, 2006(1): 87 - 91.
(SHENG Hongyu, GAO Rongyu. A modified model of Pasternak foundation and analytical solution for laminated plate on the elastic foundation [J]. *China civil engineering journal*, 2006(1): 87 - 91.)
- [16] ZHU Mingxing, ZHANG Yanbei, GONG Weiming, et al. Generalized solutions for axially and laterally loaded piles in multilayered soil deposits with transfer matrix method [J]. *International journal of geomechanics*, 2016, 17(4): 04016104.
- [17] LIN Jianping, WANG Guannan, BAO Guangjian, et al. Stiffness matrix for the analysis and design of partial-interaction composite beams-science direct [J]. *Construction and building materials*, 2017, 156: 761 - 772.
- [18] 赵明华, 张玲, 马缤辉, 等. 考虑水平摩阻效应的土工格室加筋体受力分析[J]. *工程力学*, 2010, 27(3): 38 - 44.
(ZHAO Minghua, ZHANG Ling, MA Binhui, et al. Force analysis of geocell reinforcement with consideration of horizontal resistance effect [J]. *Engineering mechanics*, 2010, 27(3): 38 - 44.)
- [19] 浙江省交通运输厅. 公路软土地基路堤设计规范: DB33/T 904—2021 [S]. 杭州: 浙江省市场监督管理局, 2021.
(Department of Transport of Zhejiang Province. Specification of design of highway embankment on soft ground: DB33/T 904—2021 [S]. Hangzhou: Zhejiang Market Supervision Administration, 2021.)
- [20] 杨明辉, 邓岳保, 赵明华. 基于叠梁试验的土工格室垫层刚度确定方法研究[J]. *土木工程学报*, 2011, 44(11): 87 - 92.
(YANG Minghui, DENG Yuebao, ZHAO Minghua. Study of stiffness test method of geocell cushion based on superposed beam theory [J]. *China civil engineering journal*, 2011, 44(11): 87 - 92.)

(责任编辑: 刘春光 英文审校: 范丽婷)