

# 基于能量变分理论的简支曲线组合梁变形性能研究

王连广,许一鸣,叶金库

(东北大学资源与土木工程学院,辽宁 沈阳 110819)

**摘要** 目的 对均布荷载下曲线U型钢与混凝土组合梁的变形计算进行研究,以便于实际工程中限定曲线组合梁的变形范围。方法 依据能量法,考虑界面滑移影响,建立均布荷载下曲线组合梁的变形公式,并进一步得出不同参数对于曲线梁的变形影响。结果 当均布荷载增加时,曲线组合梁的变形随之增大,且变形值与均布荷载大小成正比;圆心角从10°增加到50°,变形值增加了大约44%;混凝土板厚从110 mm增加到440 mm,变形值降低大约43%;钢梁壁厚从20 mm增加到80 mm,变形值降低大约58%;连接刚度从0增加到 $3.0 \times 10^4$  MPa,变形值降低大约22%。结论 不同参数对于曲线组合梁变形的影响程度不同;对于变形有严格要求时,应当在考虑经济效益的同时,优先考虑适当降低圆心角或增加钢梁壁厚。

**关键词** 曲线钢与混凝土组合梁;能量法;界面滑移;弯扭耦合;变形计算

中图分类号 TU398      文献标志码 A

## Calculation of Deformation Performance on Simply Supported Composite Beams Based on the Energy Theory

WANG Lianguang, XU Yiming, YE Jinku

(School of Resources and Civil Engineering, Northeastern University, Shenyang, China, 110819)

**Abstract:** The deformation of the curved U-shaped steel and concrete composite beam was studied, in order to limit the deformation range of curved composite beams in practical engineering. The deformation formula of the curved composite beam under uniform load was established by using the energy method, considering the influence of interface slip. The influence of different parameters on the deformation of the curved beam was further obtained. When the uniform load increases, the deformation of the curved composite beam increases, and the deformation value is proportional to the uniform load. The deformation value increases by about 44% with the center angle increasing from 10° to 50°; the deformation value decreases by about

收稿日期:2021-06-15  
基金项目:国家自然科学基金青年基金项目(51808100);辽宁省自然科学基金指导计划项目(2019-ZD-0004);辽宁省自然科学基金项目(20170540303)  
作者简介:王连广(1964—),男,教授,博士研究生导师,主要从事钢与混凝土组合结构等方面研究。

43% with the thickness of concrete slab increasing from 110 mm to 440 mm; the deformation value decreases by about 58% with the steel beam wall thickness increasing from 20 mm to 80 mm; and the deformation value decreases by about 22% with the connection stiffness increasing from 0 to  $3.0 \times 10^4$  MPa. The effects of parameters on the deformation of curved composite beams are different. When the deformation is strictly required, it should be given priority to reduce the center angle or increase the thickness of the steel beam while considering the economic benefits.

**Key words:** curved steel and concrete composite beam; energy theory; interface slip; bending-torsion coupled; deformation calculation

由于钢与混凝土组合结构充分利用材料性能,具有较高的经济效益,故被广泛用于桥梁结构上。而随着新的曲线梁施工技术的出现,曲线梁桥开始被推广。其中,曲线钢与混凝土组合梁桥相比传统直线组合梁桥,可以更好地满足公路线型的需要,具有线路平顺、美观及容易布置等优点<sup>[1]</sup>,因此具有较好的应用前景。

近年来,曲线梁理论研究得到了极大的丰富和发展;C. H. Yoo 等<sup>[2]</sup>给出了竖向弯矩和扭转作用下的曲线组合梁的抗弯强度公式;LIU Xinpei 等<sup>[3]</sup>研究了曲线钢-混凝土组合梁的徐变和收缩特性;I. Ecsedi 等<sup>[4-5]</sup>分别用力学方法和能量法给出了曲线组合梁变形的求解方法;K. Lee 等<sup>[6]</sup>推导出等端弯矩作用下简支曲线钢梁的极限承载力方程;F. Ljubinkovic 等<sup>[7]</sup>给出了曲线箱型钢桥下翼缘弯曲钢板性能及荷载作用下钢板的应力状态;张元海<sup>[8]</sup>利用能量变分法研究了曲线箱梁的剪滞效应,给出了微分方程和求解方程;姚焯<sup>[9]</sup>和耿凯<sup>[10]</sup>分别给出了曲线简支组合梁和多跨曲线连续组合梁的内力公式与变形方程;孙鹏<sup>[11]</sup>对超静定曲线组合梁的力学性能进行了研究;陈百玲等<sup>[12]</sup>给出了曲线 U 型组合梁界面滑移以及轴向力的计算公式。

随着数值计算技术的快速发展,大量学者利用有限元对曲线梁进行受力性能分析。J. F. Hajjar 等<sup>[13]</sup>和 T. Adamakos 等<sup>[14]</sup>分别利用梁格法和空间类梁结构单元体系对于曲线组合梁受力性能进行了研究;J. Seo<sup>[15]</sup>利用有限元和统计工具确定不同参数对于曲线

梁抗震性能的影响;S. J. Fatemi 等<sup>[16]</sup>对钢混凝土组合箱梁桥的荷载分布进行了数值研究;M. Aman 等<sup>[17]</sup>将曲线钢梁模型进行简化;朱力和李明杰等<sup>[18-19]</sup>提出了翘曲、畸变及双向滑移作用下的曲线钢-混凝土组合箱形梁单元模型。

由于弯扭耦合影响较为复杂,薄壁曲线组合梁变形方面研究一直是研究难点。到目前为止,大部分学者对于曲线组合梁的变形研究采用弹性理论,且很少考虑组合梁界面连接件作用。在考虑连接件作用的时候,采用弹性力学的方法十分困难,而采用能量法较为简单。基于上述分析,笔者采用能量理论,考虑弯扭耦合效应和剪力连接件对界面滑移的影响,对曲线组合梁变形进行计算。研究表明:适当降低圆心角或增加钢梁壁厚可以有效减小曲线梁变形,而混凝土板厚度以及连接刚度对变形的影响较小。

## 1 变形微分方程

根据曲线 U 型钢与混凝土组合梁结构受力机理和特点,作基本假定:钢梁与混凝土翼缘板曲率相同;忽略水平位移计算中曲率的影响;钢梁与混凝土板界面上产生的剪力与界面滑移成正比。

组合梁的轴向切线方向(纵向)为  $z$  方向,曲线向心方向(横向)为  $x$  方向,垂直于曲线平面向下为  $y$  方向;对应方向位移为  $u(z)$ 、 $v(z)$ 、 $w(z)$ ,扭转角为  $\varphi(z)$ 。在  $z$  方向,钢梁和混凝土板位移分别为  $u_s$  和  $u_c$ ,组合梁变形为  $w$ ,则连接件位移: $\Delta = u_s - u_c +$

$w'h/2$  ( $h = h_c + h_s, h_s, h_c$  分别为钢梁和混凝土板高度);因忽略横向滑移,连接件在  $x$  方向位移为 0。梁上任意一点的荷载可用分布荷载  $q_x, q_y, q_z$  以及三个分布扭矩  $m_x, m_y, m_z$  代替。梁截面形式见图 1,直角流动坐标系见图 2,变形的方向见图 3。

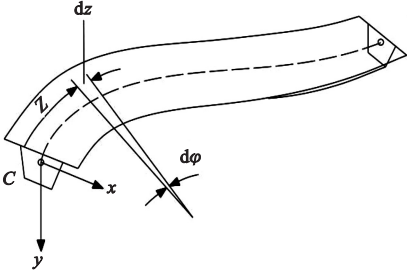


图 1 曲线组合梁截面形式

Fig. 1 The section form of curved composite beam

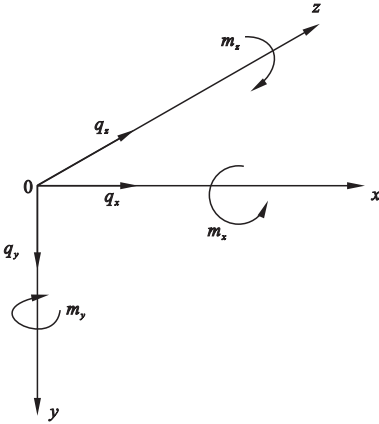


图 2 三维直角流动坐标系

Fig. 2 Three dimensional cartesian mobile coordinate system

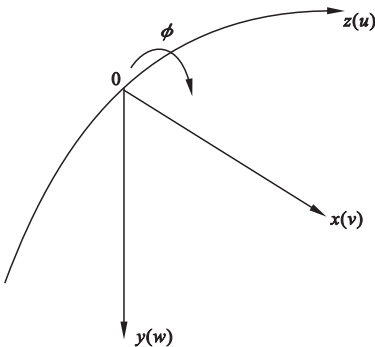


图 3 位移和转角的方向

Fig. 3 The direction of displacements and rotations

通过收集整理组合梁的外力势能与应变势能<sup>[20-21]</sup>,进而可以整理出曲线组合梁的总势能公式:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{总}} = & \frac{1}{2} E_c A_c \int_0^s u_c'^2 dz + \frac{1}{2} E_s A_s \int_0^s u_s'^2 dz + \\ & \frac{1}{2} EI \int_0^s \left( w'' - \frac{\varphi}{r} \right)^2 dz + \frac{1}{2} GI_d \int_0^s \left( \varphi' + \frac{w'}{r} \right)^2 dz + \\ & \frac{1}{2} \int_0^s k_u \left( u_s - u_c + \frac{h}{2} w' \right)^2 dz - \int_0^s q_{cz} u_c dz - \\ & \int_0^s q_{sz} u_s dz + \int_0^s (m_x w' - q_y w - m_z \varphi) dz + \\ & \left[ M_x w' - Q_y w - T \varphi \right] \Big|_0^s. \end{aligned} \quad (1)$$

式中:  $E_c, E_s$  分别为混凝土板、钢梁的弹性模量;  $EI = E_c I_c + E_s I_s$  ( $I_c, I_s$  分别为混凝土板、钢梁分别对  $x$  轴的惯性矩);  $A_c, A_s$  分别为混凝土板、钢梁的截面面积;  $GI_d = G_c I_{cd} + G_s I_{sd}$  ( $G_c, G_s$  分别为混凝土板、钢梁的剪切模量;  $I_{cd}, I_{sd}$  分别为混凝土板、钢梁绕  $z$  轴的抗扭惯性矩);  $k_u$  分别为单位梁长的纵向滑移刚度,  $k_u = \frac{k}{l_a}$ ,  $k$  为连接件刚度,  $l_a$  为连接件间距;  $q_{cz}, q_{sz}$  分别为混凝土板和钢梁上受到的沿轴向上的均布荷载;  $M_x, Q_y, T$  分别为组合梁的弯矩、剪力、扭矩;  $r$  为曲线梁曲率半径。

由于式(1)中各变量相互独立,根据最小势能原理,即当总势能的变分为 0 时,整理得:

$$\begin{cases} E_c A_c u_c'' + k_u \left( u_s - u_c + \frac{h}{2} w' \right) + q_{cz} = 0; \\ E_s A_s u_s'' - k_u \left( u_s - u_c + \frac{h}{2} w' \right) + q_{sz} = 0; \\ EI \left( w'''' - \frac{\varphi''}{r} \right) - \frac{GI_d}{r} \left( \varphi'' + \frac{w''}{r} \right) - \\ \frac{k_u h}{2} \left( u_s' - u_c' + w'' \frac{h}{2} \right) - \frac{\partial m_x}{\partial z} - q_y = 0; \\ GI_d \left( \varphi'' + \frac{w''}{r} \right) + \frac{EI}{r} \left( w'' - \frac{\varphi}{r} \right) + m_z = 0. \end{cases} \quad (2)$$

根据力的平衡方程,将式(2)进行整理,得到考虑弯扭耦合和剪力连接件对界面滑移影响下的变形微分方程:

$$\frac{d^4w}{dz^4} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{EI}{GI_d} \right) \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial Q_y}{\partial z} + \frac{\partial m_x}{\partial z} + \frac{hk_u}{2} \left( u'_s - u'_c + w'' \frac{h}{2} \right) \right]. \quad (3)$$

2 变形计算公式

均布荷载是最常见也是最为典型的荷载形式,且实际工程中车道荷载以均布荷载加集中荷载的形式计算,由于篇幅限制,笔者以两端简支的 U 型组合梁承受均布荷载为例,给出其内力公式与变形计算。

根据结构特点,将计算模型进行简化,见图 4。

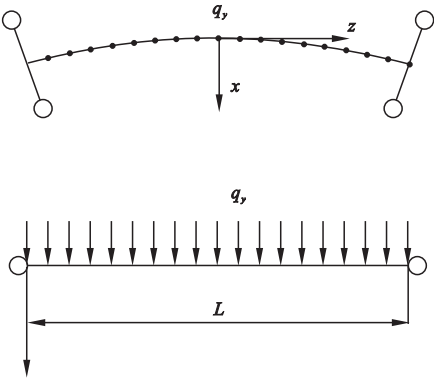


图 4 简支曲线组合梁承受竖向均布荷载

Fig. 4 The simply supported curved beam under vertical uniformly distributed load

弯矩  $M_x$ 、扭矩  $T$ 、剪力  $Q_y$ 、轴力  $N$  的计算公式如下<sup>[22-23]</sup>:

$$M_x = r^2 q_y \sin \frac{z}{r} \left( \tan \frac{L}{2r} - \tan \frac{z}{2r} \right). \quad (4)$$

$$T = r^2 q_y \left( \sin \frac{z}{r} - \tan \frac{L}{2r} \cos \frac{z}{r} \right) + r q_y \left( \frac{L}{2} - z \right). \quad (5)$$

$$Q_y = q_y \left( \frac{L}{2} - z \right). \quad (6)$$

$$N = A_1 e^{\alpha z} + A_2 e^{-\alpha z} - \frac{\beta r^2 q_y}{\alpha^2} + \frac{\beta r^4 q_y \left( \cos \frac{z}{r} + \tan \frac{L}{2r} \sin \frac{z}{r} \right)}{\alpha^2 r^2 + 1}. \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} = \alpha^2 A_1 e^{\alpha z} + \alpha^2 A_2 e^{-\alpha z} + \frac{\beta r^2 q_y \left( -\cos \frac{z}{r} - \tan \frac{L}{2r} \sin \frac{z}{r} \right)}{\alpha^2 r^2 + 1}. \quad (8)$$

$$\text{其中, } A_1 = \frac{\beta r^2 q_y}{\alpha^2 (\alpha^2 r^2 + 1) (1 + e^{\alpha L})};$$

$$A_2 = \frac{\beta r^2 q_y e^{\alpha L}}{\alpha^2 (\alpha^2 r^2 + 1) (1 + e^{\alpha L})}; \beta = \frac{k_u (h_c + h_s)}{EI};$$

$$\alpha^2 = k_u \left( \frac{1}{E_c A_c} + \frac{1}{E_s A_s} \right); L \text{ 为梁长.}$$

外荷载只有均布荷载  $q_y$  时,  $m_x = 0$ ,  $N_s = -N_c$ ,  $q_{cz} = q_{sz} = 0$ 。

利用  $N_s = -N_c = N$ , 将钢梁应力代入式(2), 整理可得:

$$E_s A_s u''_s = k_u \left( u'_s - u'_c + w'' \frac{h}{2} \right) = N''. \quad (9)$$

将式(9)代入式(3), 引入  $L = \varphi_0 r$ ,  $z = \varphi_z r$ , 联立式(4)、(5)、(6)和(8), 得:

$$\frac{d^4 w}{d\phi_z^4} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{d\phi_z^2} = \delta \left( \cos \phi_z + \tan \frac{\phi_0}{2} \sin \phi_z \right) + \xi \left[ A_1 e^{\alpha \phi_z} + A_2 e^{-\alpha \phi_z} \right] - \frac{k q_y r^4}{EI}. \quad (10)$$

$$\text{其中, } k = \frac{EI}{GI_d}; \delta = \frac{r^4 q_y}{EI} \left[ (1 + k) - \frac{h r^2 \beta}{2(\alpha^2 r^2 + 1)} \right];$$

$$\xi = \frac{h r^4 \alpha^2}{2EI}.$$

通过对变量  $\varphi_z$  求导, 利用待定系数法可解出特解; 再利用边界条件:

$$w(0) = w(\varphi_0) = 0, \varphi(0) = \varphi(\varphi_0) = 0$$

可求得式(10)的通解为

$$w = \left[ \delta + \frac{k q_y r^4}{EI} - \frac{\xi}{\alpha^2 r^2} (A_1 + A_2) \right] + \left\{ \frac{k q_y r^4}{2EI} \phi_0 + \frac{1}{\phi_0} \frac{\xi}{\alpha^2 r^2} \left[ A_1 (1 - e^{\alpha \phi_0}) + A_2 (1 - e^{-\alpha \phi_0}) \right] \right\} \phi_z - \frac{k q_y r^4}{2EI} \phi_z^2 + \left\{ -\tan \frac{\phi_0}{2} \left( \delta + \frac{k q_y r^4}{EI} \right) + \frac{\xi}{\alpha^2 r^2 + 1} \left[ A_1 (e^{\alpha \phi_0} - \cos \phi_0) + A_2 (e^{-\alpha \phi_0} - \cos \phi_0) \right] + \frac{\tan \frac{\phi_0}{2}}{\sin \phi_0} \delta \phi_0 \right\} \sin \phi_z +$$

$$\left\{ -\delta - \frac{kq_y r^4}{EI} + \frac{\xi}{\alpha^2 r^2 + 1} (A_1 + A_2) \right\} \cos \phi_z + \frac{\phi_z \delta}{2} \left( \tan \frac{\phi_0}{2} \cos \phi_z - \sin \phi_z \right) + \frac{\xi}{\alpha^4 r^4 + \alpha^2 r^2} \times (A_1 e^{\alpha r \phi_z} + A_2 e^{-\alpha r \phi_z}). \tag{11}$$

经过计算分析,公式可以简化为:

$$w = \frac{q_y r^4}{EI} \left\{ \zeta_1 (1 - \cos \varphi_z) - \tan \frac{\varphi_0}{2} \times \left( \frac{\varphi_0}{2 \sin \varphi_0} \zeta_2 - \zeta_2 - k \right) \sin \varphi_z + \frac{\varphi_z}{2} \left[ \zeta_2 \left( \tan \frac{\varphi_0}{2} \cos \varphi_z - \sin \varphi_z \right) + k (\varphi_0 - \varphi_z) \right] \right\}. \tag{12}$$

其中,  $\zeta_1 = (1 + 2k) \frac{\beta h}{2\alpha^2}$ ,  $\zeta_2 = (1 + k) - \frac{\beta h r^2}{2(\alpha^2 r^2 + 1)}$ 。

3 参数影响分析

均布荷载是最常见也是最为典型的荷载

形式,且实际工程中车道荷载以均布荷载加集中荷载的形式计算<sup>[24-25]</sup>,给出均布荷载和集中荷载下的曲线组合梁变形公式有利于实际工程的参考与借鉴,具有一定的实际意义。由于篇幅限制,笔者仅给出均布荷载下曲线组合梁的变形公式,利用得到的变形计算公式,通过数值计算推出各参数的影响情况。

曲线组合梁长  $L = 40\text{ m}$ ,圆心角取  $\varphi_0 = 30^\circ$ 。混凝土板采用 C30 混凝土,高度、宽度分别为  $h_c = t_c = 220\text{ mm}$  和  $b_c = 7.5\text{ m}$ 。钢梁底板宽度  $2.8\text{ m}$ ,钢梁高  $2.0\text{ m}$ ,钢梁壁厚  $t_s = 40\text{ mm}$ 。剪力连接件选用栓钉连接,滑移刚度取为  $k_u = 3.0 \times 10^3\text{ MPa}$ 。均布荷载取  $q = 21\text{ kN/m}$ 。材料特性及截面参数见表 1,截面尺寸示意图如图 5 所示。

表 1 材料特性及截面参数

Table 1 The material properties and section parameters

材料	弹性模量/ 10 <sup>5</sup> MPa	泊松比	剪切模量/ 10 <sup>5</sup> MPa	截面惯性 矩/m <sup>4</sup>	对 z 轴弹性 模量/m <sup>4</sup>	截面形心/m	扭转中心/m
混凝土板	0.3	0.2	0.125	0.040 86	0.140 69	$\bar{x} = 0$	$\bar{x} = 0$
钢梁	2.0	0.3	0.769	0.629 34	0.672 15	$\bar{y} = -0.033\ 77\text{ m}$	$\bar{y} = -0.182\ 47\text{ m}$

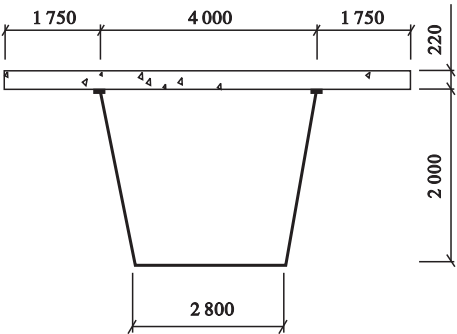


图 5 截面尺寸示意图

Fig. 5 The section size chart

(1)荷载影响。分别取 4 种不同大小的均布荷载,代入变形理论计算公式,得到曲线组合梁在不同圆心角参数下相应的变形曲线图(见图 6)。

计算结果表明:对于承受均布荷载的曲线组合梁,两端的变形值为零,跨中的变形值最大,变形沿梁长左右对称。均布荷载对于曲线组合梁的变形影响明显,当均布荷载增

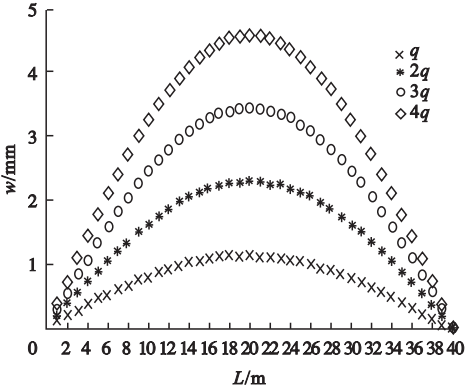


图 6 均布荷载对变形的影响

Fig. 6 The influence of uniform load on deformation 加时,曲线组合梁的变形随之增大,且变形值与均布荷载成正比。

(2)圆心角影响。分别取五种不同大小的圆心角,将其代入变形理论计算公式,得到曲线组合梁在不同圆心角参数下相应的变形曲线(见图 7)。



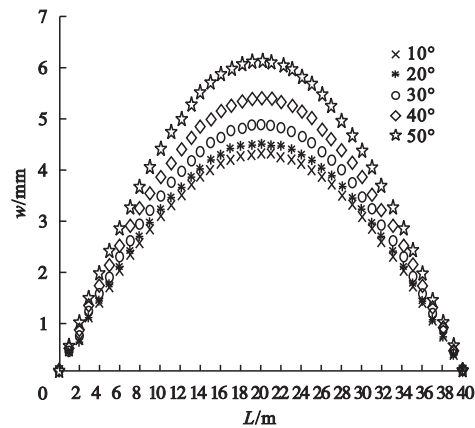


图7 圆心角对变形的影响

Fig. 7 The influence of center angle on deformation

通过计算结果与图7可知,对于受均布荷载的曲线组合梁,圆心角越大,结构整体变形值越大。尤其是当圆心角在 $30^{\circ}\sim 50^{\circ}$ 时,增加的幅度较大,最大增加约27%;而当圆心角减小到 $30^{\circ}$ 及以下时,变形值变化越来越小,直至趋向稳定。故可知,对于半径较小的曲线组合梁,必须考虑圆心角参数的影响,对于半径较大的曲线组合梁,可以忽略圆心角影响,视为直线组合梁。

(3)混凝土板厚与钢梁壁厚的影响。分别取不同厚度的混凝土板以及不同壁厚的钢梁。将数据代入变形计算公式,得出曲线组合梁在不同混凝土板与钢梁壁厚下的变形曲线(见图8、图9)。

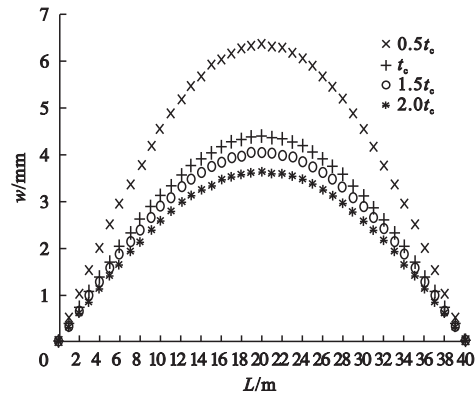


图8 混凝土板厚度对变形的影响

Fig. 8 The influence of the concrete slab thickness on deformation

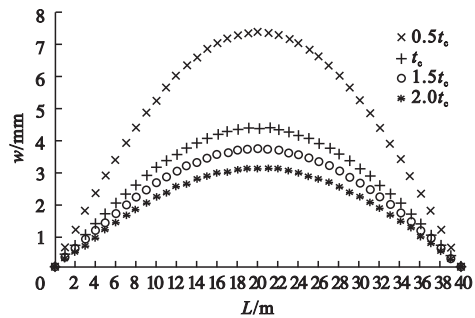


图9 钢梁壁厚对变形的影响

Fig. 9 The influence of steel beam wall thickness on deformation

通过计算结果与图8、图9可知,对于受均布荷载的曲线组合梁,当混凝土板厚度从 $0.5t_c$ 增加到 $t_c$ 时,变形值降低约31%;当混凝土板厚度从 $t_c$ 增加到 $2t_c$ 时,变形值降低约17%;同样增加钢梁厚度,当钢梁壁厚从 $0.5t_s$ 增加到 $t_s$ 时,变形值降低约41%;当钢梁壁厚从 $t_s$ 增加到 $2t_s$ 时,变形值降低约29%。适当增加混凝土厚度和钢梁壁厚可以显著降低变形值,且增加钢梁壁厚效果更好;但到达一定厚度后,则影响较小。因而在结构设计中,不仅要考虑尺寸对变形的影响,也应考虑贡献率,节约材料、降低成本。

(4)连接刚度影响。分别取五种不同的连接刚度,将其代入变形计算理论公式,得到曲线组合梁在不同连接刚度参数下,变形沿梁长的分布曲线(见图10)。

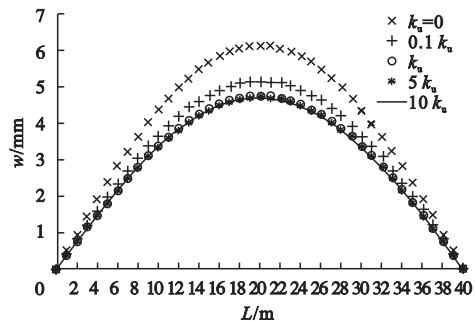


图10 连接刚度对变形的影响

Fig. 10 The influence of connection stiffness on deformation

通过计算结果与图10可知,对于受均布

荷载的曲线组合梁,当 $k_u=0$ 时,上侧的混凝土板与下侧的钢梁之间处于自滑状态,此时曲线组合梁的整体变形值最大;当连接刚度小于 $k_u$ 时,连接刚度增加对于变形值降低有显著效果,连接刚度从0增加到 $k_u$ ,变形值降低约22%;而当连接刚度大于 $k_u$ 时,变形值变化很小,甚至趋向稳定。因而在结构设计中,不仅要考虑连接刚度对组合梁变形的影响,也应考虑连接刚度对减小变形的贡献率。

## 4 结 论

(1)在变形微分方程的基础上,得到了曲线U型钢与混凝土组合梁在均布荷载下的变形公式;通过变形计算公式,得到变形沿梁长的分布规律,两端的变形值为0,跨中的变形值最大,变形沿梁长左右对称。

(2)荷载大小、圆心角与钢梁壁厚是影响曲线U型钢与混凝土组合梁变形的主要因素;当均布荷载增加时,曲线组合梁的变形随之增大,且变形值与均布荷载成正比;圆心角在 $30^\circ \sim 50^\circ$ 时,增加的幅度较大,最大增加约27%;钢梁壁厚从20 mm增加到80 mm,变形值降低大约58%;而混凝土板厚度以及连接刚度对变形的影响较小。

(3)笔者所得计算结果适用于工程中曲线U型钢与混凝土组合梁桥的建设,建议在结构设计时,应优先考虑钢梁壁厚和组合梁圆心角对变形的影响。

## 参考文献

- [1] 赵跃宇,康厚军,冯锐,等. 曲线梁研究进展[J]. 力学进展,2006(2):170-186.  
(ZHAO Yueyu, KANG Houjun, FENG Rui, et al. Advances of research on curved beams [J]. Advances in mechanics, 2006(2): 170-186.)
- [2] YOO C H, KIM K, LEE K C, et al. Bending strength of a horizontally curved composite I-girder bridge [J]. Journal of bridge engineering, 2012, 18(5): 388-399.
- [3] LIU Xinpei, ERKMEN R E. Creep and shrinkage analysis of curved composite beams

with partial interaction [J]. International journal of mechanical sciences, 2012, 58(1): 57-68.

- [4] ECSEDI I, LENGUEL A J. Curved composite beam with interlayer slip loaded by radial load [J]. Curved and layered structures, 2015, 2(1): 50-58.
- [5] ECSEDI I, LENGUEL A J. An analytical solution for static problems of curved composite beams [J]. Curved and layered structures, 2019, 6(1): 105-116.
- [6] LEE K, DAVIDSON J S, CHOI J H, et al. Ultimate strength of horizontally curved steel I-girders with equal end moments. Engineering structures, 2017, 153: 17-31.
- [7] LJUBINKOVIC F, MARTINS J P, GERVASIO H, et al. Experimental behavior of curved bottom flanges in steel box-girder bridge decks [J]. Journal of constructional steel research, 2019, 160(9): 169-188.
- [8] 张元海. 箱形梁桥剪滞效应和温度效应理论研究及其应用[D]. 成都: 西南交通大学, 2009.  
(ZHANG Yuanhai. Theoretical study and application of shear-lag and temperature effect in box-girder bridges [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2009.)
- [9] 姚焯. 曲线U型钢与混凝土简支组合梁受力性能研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2013.  
(YAO Ye. Study of mechanical behavior on cured U-steel and concrete simply supported composite beam [D]. Shenyang: Northeast University, 2013.)
- [10] 耿凯. 曲线钢与混凝土连续组合梁受力性能研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2015.  
(GENG Kai. Study of mechanical behavior on curved steel and concrete continuous composite beam [D]. Shenyang: Northeastern University, 2015.)
- [11] 孙鹏. 超静定曲线组合梁受力性能研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2015.  
(SUN Peng. Study on mechanical behavior of statically indeterminate curved composite beams [D]. Shenyang: Northeastern University, 2015.)
- [12] 陈百玲, 王盛楠, 裴家兴, 等. 曲线U型钢与混凝土组合梁界面滑移及轴向力研究[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2021, 37(1): 27-34.  
(CHEN Bailing, WANG Shengnan, PEI Jiaxing, et al. Study on interface slip and axial force of curved U-steel and concrete composite beams [J]. Journal of Shenyang jianzhu university (natural science), 2021, 37(1): 27-34.)
- [13] HAJJAR J F, KRZMARZICK D, PALLARES L. Measured behavior of a curved composite

- I-girder bridge [J]. Journal of constructional steel research, 2010, 66(3): 351 – 368.
- [14] ADAMAKOS T, VAYAS I, PETRIDIS S, et al. Modeling of curved composite I-girder bridges using spatial systems of beam elements [J]. Journal of constructional steel research, 2011, 67(3): 462 – 470.
- [15] SEO Junwon. Statistical determination of significant curved I-girder bridge seismic response parameters [J]. Earthquake engineering and engineering vibration, 2013, 12(2): 251 – 260.
- [16] FATEMI S J, ALI M M S, SHEIKH A H. Load distribution for composite steel-concrete horizontally curved box girder bridge [J]. Journal of constructional steel research, 2016, 116: 19 – 28.
- [17] AMANI M, ALINIA M M. The flexural behavior of horizontally curved steel I-girder bridge systems and single-girders [J]. Journal of constructional steel research, 2016, 118(3): 145 – 155.
- [18] 朱力, 李明杰, 陈超, 等. 曲线钢-混凝土组合箱形梁的约束扭转、畸变和界面双向滑移效应[J]. 建筑结构学报, 2019, 40(增刊1): 299 – 307.  
(ZHU Li, LI Mingjie, CHEN Chao, et al. Constrained torsion, distortion and bidirectional interface slip effects of curved steel-concrete composite box beams [J]. Journal of building structures, 2019, 40(S1): 299 – 307.)
- [19] 李明杰. 考虑多种力学、时变效应的曲线组合箱型梁单元的建立[D]. 北京: 北京交通大学, 2019.  
(LI Mingjie. Establishment of curved composite box girder elements considering multi-mechanical and time-dependent effects [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2019.)
- [20] 张新财, 刘晓, 王连广, 等. 基于变分理论的钢板夹心混凝土组合板界面剪力分析[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2010, 31(4): 585 – 588.  
(ZHANG Xincal, LIU Xiao, WANG Lianguang, et al. Interfacial shearing force analysis based on variational principle for steel-concrete-steel sandwich panel [J]. Journal of northeastern university (natural science), 2010, 31(4): 585 – 588.)
- [21] 彭仕凤. 薄壁曲线箱梁剪滞效应分析[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2010.  
(PENG Shifeng. Analysis of shear lag effect in thin walled curved box girder [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2010.)
- [22] 王连广. 预应力钢与混凝土组合结构[M]. 北京: 科学出版社, 2009.  
(WANG Lianguang. Prestressed composite structures of steel and concrete [M]. Beijing: Science Press, 2009.)
- [23] 杨顺达. 曲线钢-混凝土组合梁桥爬移行为研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2018.  
(YANG Shunda. Study on crawling behavior of curved steel mixed composite beam bridge [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2018.)
- [24] 郭增伟, 陈汉林, 李龙景, 等. 钢混组合曲线梁桥混凝土桥面板应力空间分布特性[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2019, 35(4): 586 – 593.  
(GUO Zengwei, CHEN Hanlin, LI Longjing, et al. Stress distribution characteristics of concrete slabs of steel – concrete composite girder bridges [J]. Journal of Shenyang jianzhu university (natural science), 2019, 35(4): 586 – 593.)
- [25] 张书兵, 王景全, 李明, 等. 考虑界面滑移效应的组合梁自振频率计算的修正折减刚度法[J]. 土木工程学报, 2015, 48(12): 41 – 49.  
(ZHANG Shubing, WANG Jingquan, LI Ming, et al. A modified stiffness reduction method for calculating the natural frequencies of composite beams considering the effect of interfacial slippage [J]. China civil engineering journal, 2015, 48(12): 41 – 49.)  
(责任编辑: 刘春光 英文审校: 范丽婷)