文章编号:2095-1922(2020)01-0094-06 doi:10.11717/j.issn:2095-1922.2020.01.11

# 有侧移对称变截面刚架屈曲临界载荷优化算法

侯祥林[1],马英成[1],刘铁林[2]

(1. 沈阳建筑大学机械工程学院,辽宁 沈阳 110168;2. 沈阳建筑大学土木工程学院,辽宁 沈阳 110168)

**摘 要 目的** 针对一类具有侧移的对称变截面刚架屈曲临界载荷求解问题,探讨稳定位型下临界载荷的数值优化算法,并提出基于非线性微分方程边值问题的刚架结构临界载荷优化求解算法. **方法** 从立柱起点条件出发,以待求临界荷载、结点弯矩为设计变量,以结点满足连续和边值条件构造目标函数,应用 VB 语言编制优化程序对算例进行分析计算,并通过 ANSYS 有限元软件进行仿真对比. **结果** 横梁长为 $2l$,柱高为 $l$ 的等截面刚架的临界载与仿真结果相对误差为 1.99%;变截面单梁门式起重机的临界载荷与仿真结果相对误差为 2.22%,算法结果与仿真结果相对误差满足精度要求,证实了笔者所提算法的正确性和有效性. **结论** 笔者所提临界载荷优化算法实现了以较少设计变量对临界载荷的高精度计算,为工程中刚架结构稳定性问题的研究提供了参考.

**关键词** 刚架稳定;非线性微分方程边值问题;优化算法;临界载荷;位型

**中图分类号** TU973$^+$.25;O224 **文献标志码** A

# The Buckling Critical Load Optimization Algorithm for a Rigid Frame with a Sway Symmetric Variable Cross Section

*HOU Xianglin*[1], *MA Yingcheng*[1], *LIU Tielin*[2]

(1. School of Mechanical Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang, China, 110168; 2. School of Civil Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang, China, 110168)

**Abstract**: To solve a class of sway variable cross-section rigid frame with symmetric buckling critical load problem, the numerical optimization algorithms of critical load with the stable buckling position are discussed, and an algorithm of critical load for rigid frame structures based on the boundary values of nonlinear equations is proposed. Starting from the condition of the starting point of the column, the critical load and junction bending moment are considered as design variables, the objective function is established by the conditions of continuity and boundary values of nodes, the numerical examples are analyzed by VB program, and the results are compared by ANSYS

**收稿日期**:2018-10-05
**基金项目**:国家自然科学基金项目(11672190);辽宁省自然科学基金项目(2015020129)
**作者简介**:侯祥林(1962—),男,教授,博士,主要从事力学方面研究.

simulation. The relative error of critical load is 1.99% between the algorithm and simulation of the constant cross-section frame with the beam length being is $2l$ and the column height is $l$; The relative error of critical load is 2.22% for variable cross-section single-girder gantry crane, the relative error is satisfied the accuracy requirement, and confirming the correctness and effectiveness of the proposed algorithm. The proposed algorithm achieves high precision calculation of critical load with less design variables, and provides a reference for the study of the stability of rigid frame structures in engineering.

**Key words**: rigid frame stability; boundary value problem of nonlinear differential equation; optimization algorithm; critical load; buckling position

刚架结构因其自身的特点和性能有着广泛的应用,如机械、土建等工程领域. 国内外学者对其静力、动力、屈曲等方面做了大量研究[1-6]. 目前对于变截面刚架临界载荷的计算有等效宽度法、有限单元法、能量法等方法. LI Kuinian[7]考虑了 P-Delta 效应,利用修正因子使刚度矩阵为零,通过一阶分析得到平面框架屈曲载荷. G. N. STAMATOPOULOS 等[8]采用牛顿-拉斐尔公式,通过迭代计算出刚架屈曲载荷. B. BLOSTOTSKY 等[9]提出了一种有侧移框架的临界屈曲载荷测量方法. 蒋沧如等[10]考虑初始缺陷影响,基于能量法对刚架结构进行了屈曲分析. 干洪等[11]通过建立刚架稳定方程,用矩阵位移法对平面刚架进行弹性屈曲分析. 韩志军等[12]基于 Hamilton 原理得到了弹性刚架的静力屈曲载荷.

侯祥林等[13-16]通过将微分方程组离散差分化的方法,提出了计算变截面压杆、刚架结构临界载荷的数值优化算法,此法当节点数量增多时,算法优化难度也会变大,之后又根据边值条件、位型条件等关系计算了变截面压杆临界载荷[17],在此基础上,笔者通过以临界载荷和未知节点弯矩为设计变量,以非线性屈曲微分方程数值算法按步表达位移与转角为过程,以结构的节点位移和转角满足的边界条件建立目标函数,提出基于非线性微分方程边值问题的刚架结构临界载荷优化求解算法,实现了以较少设计变量对刚架结构的临界载荷的高精度计算,为工程设计与分析提供参考.

## 1　屈曲微分方程和边界条件

图 1 为对称变截面刚架受力图,在屈曲临界条件下,位型见图 1(a)虚线形状. 由于对称性,简化结构见图 1(b),当按静力法求解,拆成立柱和横梁两个构件,其受力图如图 1(c)所示.

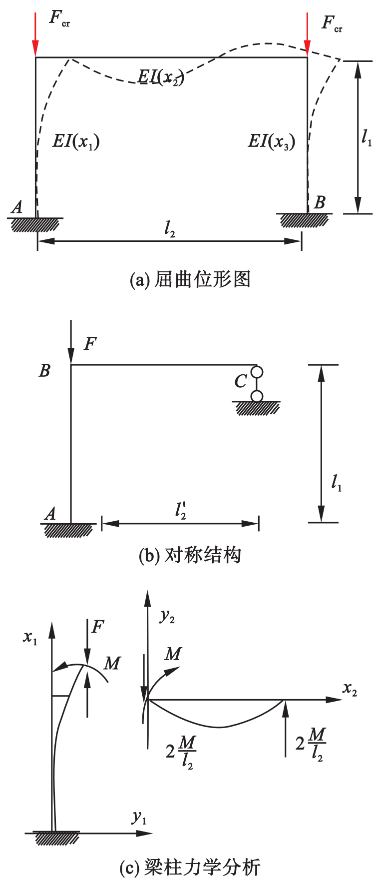


**图 1**　对称刚架屈曲受力图

**Fig. 1**　The force diagram of the symmetric frame

由材料力学,可列屈曲位型曲线微分方程为

左右立柱挠曲线的近似平衡方程(忽略剪力):

$$EI_1(x_1)w_1''=F(\Delta-w_1)-M. \quad (1)$$

梁段近似平衡方程:

$$EI_2(x_2)w_2''=M-\frac{2M}{l_2}x_2. \quad (2)$$

边界和连续条件:

$$\begin{cases}w_1(0)=0, w_1'(0)=0,\\ w_1'(l_1)=w_2'(0),\\ w_2(0)=0, w_2(l_1')=0\ .\end{cases} \quad (3)$$

其中,$EI_1(x_1)$,$EI_2(x_2)$为变截面的弯曲刚度.

## 2 无量纲化简化

(1)柱 段

方程式(1)转化为

$$\frac{EI_1(x_1)}{EI_{10}}l_1^2w_1''=\frac{F_{cr}l_1^2}{EI_{10}}(\Delta-w_1)-\frac{Ml_1{}^2}{EI_{10}}. \quad (4)$$

为了简化计算,设:$\frac{x_1}{l_1}=t_1$,$\frac{w_1}{l_1}=y_1$,$f_{cr}=\frac{F_{cr}l_1^2}{EI_{10}}$,$m=\frac{Ml_1}{EI_{10}}$,$b_1(x_1)=\frac{EI_1(x_1)}{EI_{10}}$,$\frac{\Delta}{l_1}=\delta$,代入式(4),可得无量纲差分方程:

$$b_1(x_1)y_1''=f_{cr}(\delta-y_1)-m. \quad (5)$$

设 $Y_1=y_1$,$Y_2=y_1'$,则式(5)转为状态方程:

$$\begin{cases}Y_1'=Y_2,\\ Y_2'=\frac{1}{b_1(x_1)}[f_{cr}(\delta-Y_1)-m].\end{cases} \quad (6)$$

(2)梁 段

简化过程原理如柱段,式(2)转化为无量纲差分方程式(7),进而转化为状态方程(8).

$$b_2(x_2)y_2''=\frac{l_2'}{l_1}\frac{EI_{10}}{EI_{20}}m(1-\frac{1}{l_2''}x_2). \quad (7)$$

$$\begin{cases}Y_3'=Y_4,\\ Y_4'=\frac{1}{b_2(x_2)}\frac{l_2'}{l_1}\frac{EI_{10}}{EI_{20}}m(1-\frac{x_2}{l_2'}).\end{cases} \quad (8)$$

(3)边界条件

$$\begin{cases}Y_1(0)=0,\\ Y_2(0)=0,\\ Y_2(l_1)=Y_4(0).\end{cases} \quad (9)$$

(4)连续和补充条件

$$\begin{cases}Y_1(l_1)=\delta,\\ Y_3(l_2')=0.\end{cases} \quad (10)$$

## 3 临界载荷优化算法原理

### 3.1 最优化方法

对称变截面刚架临界载荷优化方法构建:

$$\min f(z). \quad (11)$$

设计变量 $z=[z_1,z_2]^T$,$z_1$ 为待求临界载荷,$z_2$ 为节点弯矩,根据屈曲位型边界条件构建目标函数:

$$f(z)=(Y_1(l_1)-\Delta)^2+(Y_3(l'_2))^2. \quad (12)$$

### 3.2 目标函数

(1)梁柱分段

将长度分别为为 $l_i(i=1,2)$的梁、柱分为 $m_i$ 段,步长为 $h_i=\frac{l_i}{m_i}$.

(2)构建目标函数

左右立柱段计算过程.由初始点 $x_{1,0}=0$ 的边界条件 $y_1(0)=0$,$y_2(0)=0$ 和式(2),按 Runge-Kutta 法表达第 $i(i=1,2,\cdots,m_1)$个节点的挠度与转角 $Y_1[z,ih_1]$,$Y_2[z,ih_1]$.

横梁段计算过程.由 $y_3(0)=0$,$y_4(0)=y_2(l_1)$,按 Runge-Kutta 法表达 $j(j=1,2,\cdots,m_2)$个节点的挠度与转角 $Y_3[z,jh_2]$,$Y_4[z,jh_2]$.

终点边界条件:

$$\begin{cases}Y_1(x_{1,l_1})=\delta,\\ Y_3(x_{2,l_2})=0.\end{cases} \quad (13)$$

归一化目标函数为

$$f(z)=[Y_3(x_{2,l_2})]^2+[Y_1(x_{1,l_1})-\delta]^2. \quad (14)$$

### 3.3 优化程序结构和流程

采用 VB 语言结合优化方法完成程序设计[18],包括进退法、黄金分割法、龙格库塔

法、坐标轮换法等程序模块. 程序框图如图 2 所示,$\xi$ 为目标函数判别精度.

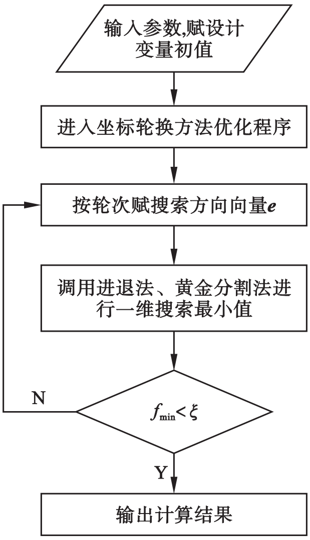


**图 2**　优化算法程序框图

**Fig. 2**　Flow chart of the optimization program

# 4　工程实例分析

(1)算例 1

图 1 为等截面刚架结构模型,左右柱脚底端为固定约束,刚架材料的弹性模量为 $E$,惯性矩为 $I$,刚架横梁的长度为 $l_2=2l$,左右两边立柱的长度为 $l_1=l$,求有侧移对称屈曲临界载荷.

VB 程序优化求解过程. 算例中变量 $n=2$,$z_1=f_{cr}$,$z_2=m$,起点边界条件为:$Y_1(0)=0$,$Y_2(0)=0$;终点边界条件为:$Y_1(l)=0.1$,$Y_3(l'_2)=0$;金分割精度为 $e_1=10^{-4}$;多维坐标轮换法精度为 $e=10^{-11}$;设计变量初始值 $z_i=\mathrm{Rnd}()$,$i=1,2$. 将计算结果列入表 1,可以看出经过 6 轮 12 次优化计算,目标函数达到设定值.

根据程序优化计算结果可得临界载荷和弯矩为

$$F_{cr}=6.033\ 61\frac{EI}{l^2},\qquad(15)$$

$$M=0.263\ 42\frac{EI}{l}.\qquad(16)$$

利用ANSYS有限元仿真验证,模型如图 1 所示. 左右立柱长度为 $l_1=1$ m,横梁长度为 $l_2=2$ m,截面为边长为 0.1 m 的正方形. 采用 BEAM188 梁单元,单元数为 200,弹性模量为 $E=200$ GPa,泊松比为 $\mu=0.3$. 其有限元 ANSYS 仿真计算的临界载荷 $F'_{cr}=0.986\times10^7$ N,根据式(15),计算出笔者算法临界载荷为 $F_{cr}=10\ 056\ 017$ N.

**表 1**　算例 1 优化过程

**Table 1**　Optimizaiton proces of example 1

| 迭代轮数 | $z_1(f_{cr})$ | $z_2(m)$ | 目标函数值 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.705 55 | 0.533 42 | 0.446 783 086 298 3 |
| 1 | 7.832 94 | 0.533 42 | 0.023 189 618 816 8 |
| 1 | 7.832 94 | 0.247 75 | 0.001 403 528 699 1 |
| 2 | 5.860 45 | 0.247 75 | 0.000 098 431 713 9 |
| 2 | 5.860 45 | 0.261 52 | 0.000 011 221 855 9 |
| 3 | 6.014 60 | 0.261 52 | 0.000 001 440 675 0 |
| 3 | 6.014 60 | 0.263 26 | 0.000 000 136 947 0 |
| 4 | 6.032 14 | 0.263 26 | 0.000 000 010 562 0 |
| 4 | 6.032 14 | 0.263 41 | 0.000 000 000 821 3 |
| 5 | 6.033 48 | 0.263 41 | 0.000 000 000 056 8 |
| 5 | 6.033 48 | 0.263 42 | 0.000 000 000 006 5 |
| 6 | 6.033 60 | 0.263 42 | 0.000 000 000 000 4 |
| 6 | 6.033 61 | 0.263 42 | 0.000 000 000 000 1 |

等截面刚架结构与 ANSYS 仿真计算临界载荷相对误差为

$$\varepsilon=\left|\frac{F_{cr}-F'_{cr}}{F'_{cr}}\right|=1.99\%.$$

若将误差判别精度设为 3%,则所述算法满足精度要求,算法与 ANSYS 仿真屈曲位型曲线对比结果如图 3 所示,表明笔者算法与有限元软件计算结果非常接近,验证了笔者算法有效可靠.

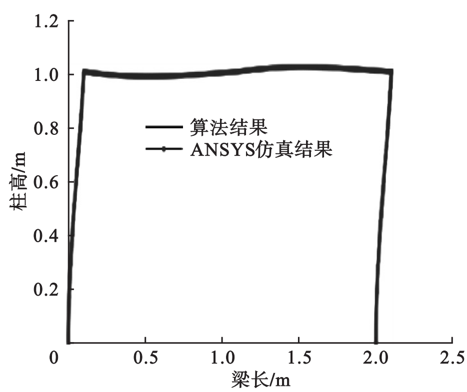


**图 3**　算例 1 屈曲位形图

**Fig. 3**　The buckling position of example 1

（2）算例 2

图 4 为单梁门式起重机简化模型，其中 $t=8$ mm，$E=200$ GPa，计算有侧移情况下变截面刚架的临界载荷.

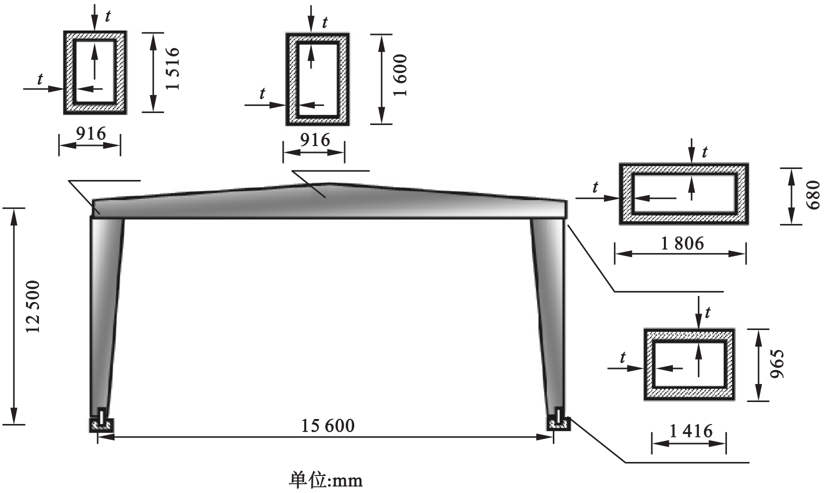


**图 4**　单梁门式起重机模型

**Fig. 4**　Single-beam portal crane model

变截面刚架结构临界载荷优化求解过程. 设计变量 $n=2$，$z_1=f_{cr}$，$z_2=m$，起点边界条件：$Y_1(0)=0$，$Y_2(0)=0$，终点边界条件：$Y_1(l)=0.1$，$Y_3(l'_2)=0$，黄金分割精度为 $e_1=10^{-4}$，多维坐标轮换法精度 $e=10^{-10}$，变量初始值 $z_i=\mathrm{Rnd}(\,)$，$i=1,2$. VB 优化程序计算结果列入表 2，可以看出经过 4 轮 7 次优化计算，目标函数达到设定值. 根据 VB 优化程序计算结果可得临界载荷与弯矩为

$$F_{cr}=8.118\,46\frac{EI_{10}}{l_1^2}=1.175\,6\times10^8\ \mathrm{N}.$$

**表 2**　算例 2 优化过程

**Table 2**　Optimizaiton proces of example 2

| 迭代轮数 | $z_1=f_{cr}$ | $z_2=m$ | 目标函数值 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.705 55 | 0.533 42 | 0.279 861 323 9 |
| 1 | 9.019 18 | 0.533 42 | 0.002 734 096 9 |
| 1 | 9.019 18 | 0.399 70 | 0.000 238 406 1 |
| 2 | 8.144 71 | 0.399 70 | 0.000 002 135 7 |
| 2 | 8.144 71 | 0.396 37 | 0.000 000 186 9 |
| 3 | 8.120 05 | 0.396 37 | 0.000 000 013 0 |
| 3 | 8.120 05 | 0.396 10 | 0.000 000 000 8 |
| 4 | 8.118 46 | 0.396 10 | 0.000 000 000 1 |

ANSYS 有限元仿真验证. 采用 BEAM188 单元进行仿真，单元数为 200，弹性模量 $E=200$ GPa，泊松比 $\mu=0.3$. 有限元 ANSYS 仿真计算的临界载荷：$F'_{cr}=1.150\,1\times10^8$ N.

笔者算法与 ANSYS 仿真计算临界载荷相对误差为

$$\varepsilon=\left|\frac{F_{cr}-F'_{cr}}{F'_{cr}}\right|=2.22\%.$$

通过上述对比，变截面刚架结构临界载荷相对误差在 3% 以内，表明笔者算法具有较高的精度，同样适用于变截面刚架结构临界载荷的求解.

## 4　结　论

（1）基于非线性微分方程边值问题转化为初值问题和最优化求解方法，构建了刚架结构临界载荷求解模型. 将笔者所提算法与 ANSYS 仿真对比分析，对比结果有很高的一致性，等截面与变截面刚架结构临界载荷的相对误差均不超过 3%.

（2）笔者所提算法具有设计变量少、计算精度高和收敛速度快等优点，有一定的实用性，为工程中设计与分析此类问题提供了支持.

## 参考文献

［1］　单辉祖. 材料力学［M］. 北京：高等教育出版

社,2009.
(SHAN Huizu. Material mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press,2009.)
[2] 罗永峰,韩庆华,李海旺. 建筑钢结构稳定理论与应用[M]. 北京:人民交通出版社,2010.
(LUO Yongfeng,HAN Qinghua,LI Haiwang. Stability theory and application of steel structures[M]. Beijing:China Communications Press,2010.)
[3] 王邵臻,艾海英. 结构力学[M]. 北京:清华大学出版社,2017.
(WANG Shaoqin,AI Haiying. Structural mechanics[M]. Beijing:Tsinghua University Press,2017.)
[4] 徐勇,陈以一,程欣,等. 轻型门式刚架抗震性能试验研究[J]. 建筑结构学报,2010,31(10):76－82.
(XU Yong,CHEN Yiyi,CHENG Xin,et al. Experimental research on hysteretic behavior of light-weight steel portal frame[J]. Journal of building structures,2010,31(10):76－82.)
[5] 中国建筑标准设计研究院. 门式刚架轻型房屋钢结构技术规范:GB51022—2015[S]. 北京:中国建筑工业出版社,2015.
(China Institute of Building Standard Design. Technical code for steel structure of light-weight building with gabled frames: GB51022—2015[S]. Beijing: China Building Industry Press,2015.)
[6] 王元清,胡宗文,石永久,等. 门式刚架轻型房屋钢结构雪灾事故分析与反思[J]. 土木工程学报,2009(3):65－70.
(WANG Yuanqing,HU Zongwen,SHI Yongjiu, et al. Analysis and reflection on snow disaster accidents of steel structures of light-weight buildings with portal frames[J]. China civil engineering journal,2009(3):65－70.)
[7] LI Kuinian. A story buckling method for evaluating system buckling load of plane sway frames[J]. International journal of steel structures,2014,14(1):173－183.
[8] STAMATOPOULOS G N. Influence of the flexible supports on the buckling loads of steel frames[J]. International journal of steel structures,2015,15(3):661－670.
[9] BLOSTOTSKY B, EFRAIM E, RIBAKOV Y. Improving the reliability of measuring critical buckling load in sway mode frames[J]. Experimental mechanics,2016,56(2):311－321.
[10] 蒋沧如,徐劲,谢伟平. 基于能量法的钢框架结构屈曲分析方法[J]. 钢结构,2006,21(3):69－71.
(JIANG Cangru,XU Jin,XIE Weiping. The buckling analysis of steel frame structures based on an energy approach[J]. Steel construction,2006,21(3):69－71.)
[11] 干洪,汪海涛. 平面刚架的弹性屈曲分析[J]. 安徽建筑大学学报,2005,13(4):1－5.
(GAN Hong,WANG Haitao. Analying elastic yield of plane rigid frame[J]. Journal of Anhui jianzhu university,2005,13(4):1－5.)
[12] 韩志军,王倩颖,张善元,等. 基于 Hamilton 原理分析柱脚铰接弹性刚架的静力屈曲[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版),2010(4):480－486.
(HAN Zhijun, WANG Qianying, ZHANG Shanyuan,et al. The static buckling of elastic portal frame with hinged-hinged support based on the hamilton principle[J]. Journal of Xi′an university of architecture & technology(natural science edition),2010(4):480－486.)
[13] 侯祥林,范炜,贾连光. 变截面压杆临界载荷的迭代算法[J]. 哈尔滨工业大学学报,2011,43(增刊):237－240.
(HOU Xianglin,FAN Wei,JIA Lianguang. The iterative algorithm of variable cross-section compression bar critical load[J]. Journal of Harbin institute of technology,2011,43(S): 237－240.)
[14] 侯祥林,王似巍,王家祥,等. 一类超静定变截面压杆临界荷载的优化算法[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版),2017(1):104－110.
(HOU Xianglin, WANG Siwei, WANG Jiaxiang,et al. An optimal algorithm for the critical load of a class of statically indeterminate variable cross-section compress bar[J]. Journal of Shenyang jianzhu university (natural science),2017(1):104－110.)
[15] 侯祥林,王似巍,张睿之,等. 一类薄壁变截面刚架对称临界载荷稳定问题优化算法[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版),2018(1):100－107.
(HOU Xianglin,WANG Siwei,ZHANG Ruizhi, et al. An optimal algorithm for stability analysis of symmetrical critical loads of thin-walled frames with variable cross-sections[J]. Journal of Shenyang jianzhu university (natural science), 2018(1):100－107.)
[16] 侯祥林,王似巍,王家祥,等. 基于改进粒子群的薄壁变截面刚架临界载荷优化算法[J]. 计算力学学报,2018(3):337－343.
(HOU Xianglin, WANG Siwei, WANG Jiaxiang,et al. Optimization algorithm of critical load of a thin-walled frame with variable cross-section based-on improved particle swarm[J]. Chinese journal of computational mechanics, 2018(3):337－343.)
[17] 侯祥林,胡建强,卢宏峰,等. 变截面压杆稳定非线性微分方程边值问题的最优化算法研究[J]. 计算力学学报,2017,34(2):137－142.
(HOU Xianglin,HU Jianqiang,LU Hongfeng, et al. Optimization algorithm of boundary value problem of stable nonlinear differential equation for valuable cross-section compression bar[J]. Chinese journal of computational mechanics,2017,34(2):137－142.)
[18] 李淑华. VB 程序设计及应用[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2014.
(LI Shuhua. Visual basic programming and application[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press,2014.)

(责任编辑:刘春光　英文审校:范丽婷)