

# 基于中轴线拟合的隧道点云去噪研究

王井利<sup>1</sup>,李华健<sup>1</sup>,王挥云<sup>2</sup>

(1. 沈阳建筑大学交通工程学院,辽宁 沈阳 110168;2. 中铁十九局集团矿业投资有限公司,北京 100071)

**摘要** 目的 通过拟合中轴线对隧道内部噪声点滤除,并在去噪时保持隧道主体数据的完整性,提出一种通过拟合隧道中轴线对隧道点云进行噪声点滤除的方法. 方法 采用统计滤波滤除部分远离主体点云的大尺度噪声点,再基于高斯曲率的方法将隧道点云数据分为管片点云和轨道面点云两类;利用投影法提取隧道中轴线,通过判断点到中轴线之间的距离与设定的阈值的大小关系,滤除隧道内部及靠近管片壁的噪声点,多次迭代去噪,直到点云数据量趋于稳定;利用直通滤波和统计滤波滤除轨道面点云噪声,最后将去噪后的管片点云和轨道面点云进行组合得到去噪后的盾构隧道点云. 结果 利用拟合得到的隧道中轴线对分类后的管片点云进行五次迭代去噪后,管片点云数量趋于稳定,噪声点基本滤除;对分类后的轨道面点云进行了有效滤除并且保持了原有特征;将去噪后的两部分点云组合,得到了完整的去噪后的隧道点云. 结论 笔者所采用的方法简单有效,能有效地滤除隧道点云噪声且保证主体数据完整性.

**关键词** 隧道点云;点云去噪;中轴线;高斯曲率

中图分类号 U459.3;P258

文献标志码 A

## Research on Tunnel Point Cloud Denoising Based on Centerline Fitting

WANG Jingli<sup>1</sup>, LI Huajian<sup>1</sup>, WANG Huiyun<sup>2</sup>

(1. School of Transportation Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang, China, 110168; 2. China Railway 19<sup>th</sup> Bureau Group Mining Investment Co. Ltd., Beijing, China, 100071)

**Abstract:** To filter the inner noise points in the tunnel by the method of fitting the central axis, and keep the integrity of the tunnel main data while denoising, a method to filter the noise points of the tunnel point cloud by fitting the central axis of the tunnel was proposed. Firstly, statistical filtering was applied to filter some large-scale noise points farther from the main point cloud. Then the Gauss curvature method was adopted to divided point cloud data of tunnel into two categories: the point cloud of segment and the point cloud of orbital plane. The central axis of the tunnel was extracted by the method of projection. By judging the relationship between the distance from the

收稿日期:2018-09-15

基金项目:国家自然科学基金项目(51774204)

作者简介:王井利(1971—),男,教授,主要从事测绘工程方面研究.

point to the central axis and the set threshold, noise points inner tunnel and near the segment was to be filtered out, and with multiple iterations for denoising until the amount of the point cloud data tends to be stable. After that, the method of straight-through filtering and statistical filtering were used to filter the point cloud noise on the orbital surface. Finally, the denoised segment point cloud and the orbital surface point cloud were combined to obtain the shield tunnel point cloud after denoising. The results show that after five iterations denoising for the classified segmented point clouds by using the fitting tunnel central axis, the number of segmented point clouds tends to be stable and the noise points are eliminated; the classified orbital plane point clouds are effectively filtered and retained their original characteristics; combining the two parts of the denoised point clouds, the complete denoised tunnel point clouds was obtained. This method, simple and effective, can effectively filter the tunnel point cloud noise and ensure the integrity of the main data.

**Key words:** tunnel point cloud; point cloud denoising; central axis; gaussian curvature

作为城市交通的重要组成部分,隧道需要进行定期的变形监测,以便及时获得隧道结构健康状况,消除安全隐患,确保地铁的正常运营. 三维激光扫描技术是一种快速的、非接触式的、自动化的、高精度的、高密度的、高效的新型测量技术,可用于隧道变形监测及施工质量检查与验收,快速高效地采集数据,获取隧道信息. 但是由于隧道内管线、支架、机箱等因素的存在,使得获取到的隧道点云数据往往包含着大量的噪声点,需要对隧道点云进行噪声滤除.

常用的点云去噪方法有双边滤波<sup>[1-2]</sup>、主成分分析法<sup>[3]</sup>、脉冲耦合神经网络法<sup>[4]</sup>、移动最小二乘法<sup>[5]</sup>、移动曲面拟合法<sup>[6]</sup>、自适应 TIN 滤波法<sup>[7]</sup>、线性预测滤波算法<sup>[8]</sup>、坡度滤波算法<sup>[9]</sup>等,这些方法对于狭长的隧道空间去噪效果不明显且可能会较大程度地影响数据精度. 因此,需要提出一些针对隧道点云数据的去噪方法,以获得良好去噪效果,同时不破坏原始点云数据精度. 余鹏磊等<sup>[10]</sup>利用区域增长方法初步提取隧道壁部分点云作为 RANSAC 算法种子点,通过种子点拟合数学模型提取隧道壁所有点云数据实现噪声滤除. 邓辉等<sup>[11]</sup>利用点云大量法向量确定隧道轴向,通过点云法向与隧道轴向之间的偏差识别隧道表面点. 琚俏俏等<sup>[12]</sup>获取沿轴线方向上的隧道点云切片,对切片点云拟合椭圆滤除噪声点. 程效军等<sup>[13]</sup>通过双向投影拟

合隧道中轴线,通过判断点到隧道中轴线的距离与所设定的阈值之间的大小关系来滤除噪声点. 徐光华等<sup>[14]</sup>提出基于隧道设计半径和基于多项式拟合相结合的方法进行去噪.

利用上述针对盾构隧道点云去噪的方法在对隧道点云数据进行去噪处理后,会造成轨道面点云数据的丢失. 基于此,笔者提出一种通过拟合隧道中轴线对隧道点云进行噪声点滤除的方法,在轨道面数据保留方面进行改进,使该方法既能有效滤除隧道点云噪声点又能保留主体数据完整性,保证后续的三维建模及变形分析质量.

## 1 提取隧道中轴线

### 1.1 投影法

目前的投影法提取的中轴线多是投影到二维平面上的中轴线,不是真正意义上的三维空间中轴线,因此笔者提出一种改进的投影法来提取隧道中轴线.

地铁隧道是以盾构法推进开挖,其结构近似于圆柱体,点云去噪过程可直接将其作为圆柱体处理. 隧道中轴线提取示意图如图 1 所示.

改进的投影法提取过程:当对横向圆柱体做竖直投影时,两条长边界与圆柱体的中轴线三线共面. 三维激光扫描仪仪器中心为坐标原点,隧道走向为  $x$  轴.  $y$  轴与  $x$  轴相互垂直且都包含于横向扫描面,  $z$  轴在竖向扫

描面,  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴相互垂直组成了一个空间直角坐标系. 将隧道点云在  $xOy$  面上投影, 获取边界点的三维坐标, 并拟合平面, 该平面为通过隧道中轴线的横截面. 接着将隧道点云在  $xOz$  面上投影, 获取出隧道上端边界点三维坐标, 将其在拟合得到的横截面上投影, 将投影点拟合一条曲线, 即隧道的中轴线.

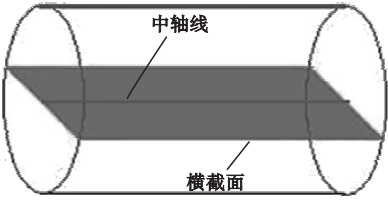


图1 隧道中轴线提取示意图

Fig.1 Tunnel axis extraction diagram

1.2 边界点云精简

由于海量数据会降低软件处理速度, 影响中轴线提取效率, 因此需要对拟合的点云数据进行精简化处理, 提高拟合效率. 常用的点云精简方法有体素栅格法、基于三角网格的精简算法、包围盒法、均值聚类自适应简化算法和非均匀网格精简算法等<sup>[15]</sup>. 笔者采用包围盒法对待拟合边界点云数据进行精简, 先用一个包围盒(空间几何体)将所有点云数据围起来, 再将该包围盒分割成  $N$  个大小均匀的小包围盒, 提取小包围盒中心点来代替对应小包围盒中所有的点, 从而实现点云的精简<sup>[16]</sup>.

1.3 多项式平面拟合

笔者采用基于最小二乘法的多项式平面拟合方法进行平面拟合.

平面方程的一般表达式为

$Ax + By + Cz + D = 0, C \neq 0,$  (1)

$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}.$  (2)

设定  $a_0 = -\frac{A}{C}, a_1 = -\frac{B}{C}, a_2 = -\frac{D}{C}$ , 则:

$z = a_0x + a_1y + a_2.$  (3)

对于  $n (n \geq 3)$  个点  $(x_i, y_i, z_i) (i = 1, 2, \dots, n)$  拟合平面方程, 需使  $S$  最小:

$S = \sum_{i=1}^n (a_0x_i + a_1y_i + a_2 - z_i)^2.$  (4)

$S$  应满足:

$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, k = 1, 2, 3.$  (5)

由式(5)可得:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n 2(a_0x_i + a_1y_i + a_2 - z_i)x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n 2(a_0x_i + a_1y_i + a_2 - z_i)y_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n 2(a_0x_i + a_1y_i + a_2 - z_i) = 0. \end{cases}$$
 (6)

式(6)展开, 并写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_iy_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_iy_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 & \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_iz_i \\ \sum_{i=1}^n y_iz_i \\ \sum_{i=1}^n z_i \end{pmatrix}.$$
 (7)

解析矩阵式(7), 可得出  $a_0, a_1, a_2$ .

则平面方程表达式为

$z = -a_0x - a_1y - a_2.$  (8)

1.4 多项式曲线拟合

笔者采用基于最小二乘法和 RANSAC 随机采样一致性算法相结合的方法进行多项式曲线拟合.

基于最小二乘法的多项式曲线拟合模型为

$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m.$  (9)

其中,  $m + 1 \leq n$  (给定点个数).

根据最小二乘原理, 可令:

$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \min(\sum_{i=1}^n p(x_i) - y_i^2).$  (10)

将式(10)展开为

$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \min(\sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x + \dots + a_mx_i^m - y_i^2)).$  (11)

由式(11)可得:

$$\frac{\partial S(a_0, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^n 2(a_0 + a_1 x + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i^j = 0, j = 0, 1, \dots, m. \quad (12)$$

将式(12)整理得:

$$\left\{ \begin{aligned} na_0 + (\sum_{i=1}^n x_i) a_1 + \dots + (\sum_{i=1}^n x_i^m) a_m &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ (\sum_{i=1}^n x_i) a_0 + (\sum_{i=1}^n x_i^2) a_1 + \dots + (\sum_{i=1}^n x_i^{m+1}) a_m &= \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ \vdots \\ (\sum_{i=1}^n x_i^m) a_0 + (\sum_{i=1}^n x_i^{m+1}) a_1 + \dots + (\sum_{i=1}^n x_i^{2m}) a_m &= \\ \sum_{i=1}^n x_i^m y_i. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

解式(13),可得  $a_0, a_1, \dots, a_m$ .

利用最小二乘法进行多项式曲线拟合时易受到异常数据(噪声点)的影响,降低曲线拟合精度.在曲线拟合时引入 RANSAC 随机采样一致性算法,对拟合点进行筛选.具体步骤为:①在点集中随机抽取  $n$  个点.根据曲线拟合的模型公式,进行参数估计,得出拟合曲线的模型方程;②将剩余点依次带入该曲线方程进行验证,判断误差大小.如果大于既定阈值,则点为无效点;反之,该点为有效点.所有的剩余点判断完成后,如果有效点的个数达到要求,则暂时判定该模型为有效模型;③对上述步骤  $k$  次迭代后,比较有效模型中的有效点个数大小,选取最多有效点的模型为最佳模型;④利用最佳模型中有效点进行最小二乘法多项式曲线拟合,最终获得拟合曲线的表达式.

按上述多项式曲线拟合方法拟合曲线即可得出中轴线模型为

$$\begin{cases} y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m, \\ z(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m. \end{cases} \quad (14)$$

## 2 点云去噪

### 2.1 统计滤波粗去噪

首先采用统计滤波滤除部分远离主体点云的大尺度噪声点,主要作用是去除隧道内部空间稀疏离群噪声点.假设点云中每个点与其最近的  $k$  个邻近点之间的平均距离都满足高斯分布,根据均值和方差可确定一个距离阈值,当某个点与其最近  $k$  个点的平均距离大于这个阈值时,判定该点为离群点并去除.统计滤波器的实现原理如下:遍历点云,计算每个点与其最近  $k$  个邻近点之间的平均距离;接着计算所有平均距离的平均值  $\mu$  与标准差  $\sigma$ ,则距离阈值  $d_{\max}$  可表示为

$$d_{\max} = \mu + \alpha \times \sigma. \quad (16)$$

其中,  $\alpha$  是一个常数,可称为比例系数,它取决于邻居点  $k$  的数目;  $k$  为临近点数量,又可称为邻域搜索值.最后,再次遍历点云,剔除与  $k$  个邻近点的平均距离大于  $d_{\max}$  的点.

### 2.2 隧道点云数据分类

基于中轴线的点云去噪会造成轨道面数据丢失,为了避免该问题,需要对隧道点云数据进行分类,对轨道面点云数据进行单独去噪处理.笔者采用基于平均高斯曲率的方法对统计滤波后的隧道点云进行分类.

曲率是曲面中一个重要的几何特征,它反映了曲面的弯曲度.曲率越大,曲面越陡峭,表面信息越丰富,构成的数据点也越多;曲率越小,曲面越平缓,表面信息越简单,构成的数据点也越少<sup>[17]</sup>.三维点云模型中每个点都可以有无数个法平面,每一点的法平面与曲面的交线的曲率为点的法向曲率.其中,最大法曲率和最小法向曲率为主曲率.主曲率之间的乘积为高斯曲率  $H$ ,中值为平均曲率  $K$ <sup>[18]</sup>.

笔者采用对噪声敏感程度最小,稳定程度较高的抛物面拟合法来估算点云模型的曲

率特性.

设抛物面方程为

$$S(x,y)=ax^2+bxy+cy^2.$$
 (17)

对式(17)求一阶偏导数可以得到曲面  $S$  的第一基本量:

$$S(I)=E\,dx^2+2F\,dxdy+G\,dy^2.$$
 (18)

其中,  $E=S_x^2, F=S_xS_y, G=S_y^2$ .

对式(17)求二阶偏导数得到曲面  $S$  的第二基本量:

$$S(II)=L\,dx^2+2M\,dxdy+N\,dy^2.$$
 (19)

其中,  $L=nS_{xx}, M=nS_{xy}, N=S_{yy}$ .

最终可得到高斯曲率  $K$  为

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=4ac-b^2.$$
 (20)

当点  $P$  处的高斯曲率值  $K$  大于所有点的  $K$  值的平均值或接近于 0 时,则点  $P$  属于轨道面部分;当  $K$  不大于所有点的  $K$  值的平均值且不接近于 0 时,则该点属于管片部分.

2.3 轨道面点云去噪

提取到的轨道面点云噪声点在  $x,y,z$  方向上有范围限制,笔者利用直通滤波法对分类出的轨道面点云数据进行噪声点滤除.沿着三个方向设定限制范围,将分布密集的噪声点保留,并与直通滤波前的轨道面点云进行对比,提取有效轨道面点云.最后,利用统计滤波对轨道面点云进行进一步噪声点滤除,完成对轨道面点云的去噪.

2.4 管片点云去噪

隧道管片设计半径为固定值,由于在施工以及后续运营过程中会有些许变形,将点到中轴线距离阈值按管片设计半径设定在合理范围内,对点云内部噪声点进行滤除.设隧道点云中一点  $O(x_o,y_o,z_o)$ ,到中轴线最短距离即为点到中轴线的距离  $D$ ,满足方程:

$$D^2=(x_o-x)^2+(y_o-y)^2+(z_o-z)^2.$$
 (21)

对  $x$  进行求导,得:

$$\frac{dD^2}{dx}=-2(x_o-x)-2(y_o-y(x)).$$

$$\frac{dy(x)}{dx}-2(z_o-z(x))\frac{dz(x)}{dx}.$$
 (22)

当  $D$  取最小值时,式(22)结果等于 0.因此,令式(22)等于 0,解出极值点  $x$  值,并带入中轴线表达式,可得出  $y$  值和  $z$  值.

将极值点  $(x,y,z)$  带入式(21)即可得出隧道点云上的点到中轴线的距离  $D$ .

利用隧道中轴线对管片点云进行点云去噪,如果距离大于既定距离阈值,则为有效点,否则视为噪声点,进行滤除.

3 实验分析

笔者使用 C++ 和 Matlab 编程实现算法,实验数据为采用 FARO Focus 3D X330 三维激光扫描仪扫描所获得的沈阳市地铁 2 号线奥体中心站至营盘街站区间的一段隧道点云数据,点云数量为 835 754 个,原始数据如图 2 所示.原始点云数据除了包含管片点云和轨道面点云,还包括大量的管线、支架、人员和设备等非有效点.



图2 原始点云数据

Fig. 2 The original point cloud

3.1 主体统计滤波粗去噪

采用统计滤波法对远离管片及轨道面主体数据的稀疏离群点进行滤除,经多次试验分析,当  $k$  邻域搜索值分别取 15,标准方差  $\sigma$  的倍数阈值  $\alpha$  取 1.5 时,能较大幅度地滤除内部远离管片和轨道面主体数据的稀疏噪声点.隧道点云统计滤波粗去噪结果如图 3 所示.滤波后点云数据量为 829 371 个,滤除的噪声点个数适当,且内部稀疏噪声点明显滤除,并保持了原有特征,粗去噪效果良好.





图3 隧道点云统计滤波

Fig. 3 The point cloud after statistical filtering

3.2 隧道点云去分类

利用中轴线对隧道点云进行去噪时会造成轨道面点云数据丢失,因此需要对隧道点云数据进行分类,以便保留轨道面点云数据.采用比较连续面平均高斯曲率的方法对粗去噪后的隧道点云进行分类,提取轨道面点云数据.图4为分类后管片部分点云,点云数据量为705 411个;图5为分类后轨道面点云,点云数据量为123 960个,分类后的数据保持原有特征,不影响后续噪声滤除.

3.3 隧道点云去噪分析

利用分类后的管片点云提取隧道中轴

$$\begin{cases} y(x) = 30.259\ 63 + 0.632\ 04x + 6.326 \times 10^{-4}x^2 + 5.281 \times 10^{-7}x^3 + 1.057 \times 10^{-10}x^4, \\ z(x) = 25.838\ 77 + 0.082\ 04x + 8.132 \times 10^{-5}x^2 + 1.016 \times 10^{-9}x^3 + 4.011 \times 10^{-12}x^4. \end{cases} \quad (24)$$

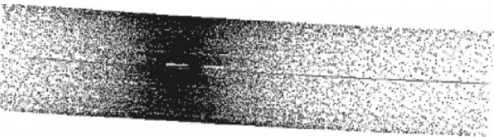


图6 隧道中轴线

Fig. 6 Tunnel axis

利用拟合出的中轴线对管片点云进行点云去噪处理,沈阳地铁盾构隧道设计半径为2.7 m,为了不破坏管片壁上的点云,设距离阈值为2.67 m,通过计算管片点云中的点到中轴线距离并比较既定阈值2.67 m的大小滤除管片壁上的管线、机箱、支架等内部噪声点,初次去噪结果如图7所示,剩余点云数据量为689 244个.

从图7可看出,管片上方噪声点滤除效果明显,两侧还有部分贴附在管片壁上的管

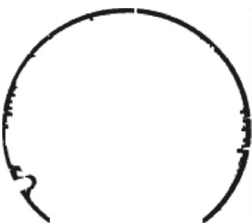


图4 分类后管片点云

Fig. 4 The point cloud of segment after classification

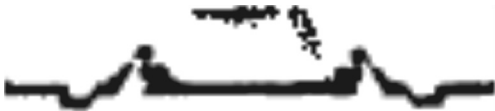


图5 分类后轨道面点云

Fig. 5 The point cloud of orbital after classification  
线,采用包围盒法对投影后获取到的边界点进行精简处理,减少数据量,提高拟合效率.在进行多项式拟合中轴线时,如果多项次数选择低,会大大降低拟合精度;多项次数高,会提升拟合复杂性.因此笔者采用四次多项式拟合中轴线,式(24)为初次拟合结果,图6为初次拟合出的隧道中轴线.

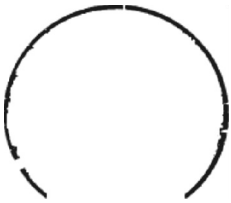


图7 管片点云初次去噪结果

Fig. 7 Result of segment point cloud after the first filtering

线等噪声点,初次去噪效果并未完全滤除管片壁上的噪声点,这是由于中轴线拟合精度受噪声点影响会产生较小的误差所导致的,因此需要重新拟合中轴线,通过判断点到中轴线之间的距离与既定阈值大小进一步对管片点云进行噪声点滤除,并重复该过程对管片点云进行多次迭代去噪.

图8为管片点云的多次去噪结果,表1

为管片点云去噪剩余点云数据量. 从图 8 和表 1 可以看出经过 5 次迭代去噪, 两侧贴在管片壁上的噪声点已明显滤除, 点云数据量已趋于稳定, 完成对管片点云的去噪.

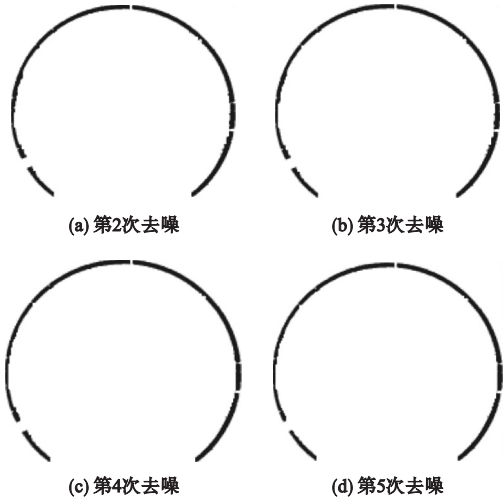


图 8 管片点云多次去噪结果

Fig. 8 Result of segment point cloud after several filtering

表 1 多次去噪后的管片点云数据量

Table 1 Data of segment point cloud after several filtering

次数	上次剩余管片点云 数据量/个	本次剩余管片点 云数据量/个
2	689 244	687 631
3	687 631	687 220
4	687 220	687 074
5	687 074	686 998

对分类后的轨道面点云进行直通滤波和统计滤波去噪处理, 经多次实验分析, 将  $x$ ,  $y$ ,  $z$  三个方向上的范围分别限制为  $(63, 73)$ 、 $(31.5, 33.5)$  和  $(-1.5, -1.2)$ , 将邻域搜索值  $k$  取 15,  $\alpha$  取 1.5, 滤除效果明显, 去噪结果如图 9 所示, 分布在轨道面上方的噪声点已基本滤除, 并且良好地保持了轨道特征.



图 9 轨道面点云去噪结果

Fig. 9 Result of orbital point cloud after filtering

最后将进行完全去噪后的管片点云与轨道面点云进行组合, 即盾构隧道点云去噪结果, 完整的隧道点云去噪结果见图 10.



图 10 隧道点云去噪结果

Fig. 10 Result of tunnel point cloud after filtering

4 结 论

(1) 利用投影法提取隧道中轴线, 通过判断点到中轴线之间的距离与设定的阈值的大小关系, 滤除噪声点. 经过 5 次迭代去噪, 点云数据量趋于稳定, 并且通过视觉观察分析基本滤除了隧道内部及靠近管片壁的噪声点; 利用直通滤波和统计滤波滤除轨道面点云噪声, 再将去噪后的管片点云和轨道面点云进行组合, 可得到去噪后的盾构隧道点云.

(2) 该方法简便有效, 能有效滤除噪声点, 且保持主体数据完整性, 避免了轨道面数据丢失, 保证了后续的三维建模及变形分析质量.

参考文献

[1] 肖国新, 于辉, 周晓辉. 一种自适应双边滤波点云去噪算法[J]. 信息技术, 2017(10): 118-120.  
(XIAO Guoxin, YU Hui, ZHOU Xiaohui. An adaptive bilateral filtering point cloud denoising algorithm[J]. Information technology, 2017(10): 118-120.)

[2] 荆方, 刘增力. 基于改进的双边滤波与非下采样剪切波变换的图像去噪[J]. 通信技术, 2019, 52(1): 80-85.  
(JING Fang, LIU Zengli. Image denoising based on improved bilateral filtering and non-subsampled shearlet transform[J]. Communications technology, 2019, 52(1): 80-85.)

[3] CASTILLO E, LIANG J, ZHAO H. Point cloud segmentation and denoising via constrained nonlinear least squares normal estimates[M]. Germany: Springer Berlin Heidelberg, 2013: 283-299.

[4] 周浩宇, 辛国江, 谭光华, 等. 基于脉冲耦合神

- 经网络的点云曲面去噪[J]. 电子学报, 2012, 40(11): 2221–2225.  
(ZHOU Haoyu, XIN Guojing, TAN Guanghua, et al. PCNN-based point set surface denoising[J]. Acta electronica sinica, 2012, 40(11): 2221–2225.)
- [5] WANG X, LI Z, MAI Y, et al. Robust denoising of unorganized point clouds[C]//Proceedings of the 2011 international conference on intelligent computing and integrated systems. Piscataway: IEEE, 2013: 1–3.
- [6] 曹红新. 机载 LIDAR 数据滤波方法研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2011.  
(CAO Hongxin. The method study of LIDAR filtering[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2011.)
- [7] 吴丛丛, 卢小平, 李国立, 等. 基于 TIN 的 LiDAR 数据滤波算法研究[J]. 测绘通报, 2013(3): 32–35.  
(WU Congcong, LU Xiaoping, LI Guoli, et al. Research on filtering algorithm for LiDAR data based on TIN[J]. Bulletin of surveying and mapping, 2013(3): 32–35.)
- [8] 张靖, 张晓君, 江万寿, 等. 一种改进的线性预测滤波算法[J]. 国土资源遥感, 2011(1): 52–56.  
(ZHANG Jing, ZHANG Xiaojun, JIANG Wanshou, et al. Progressive linear prediction fitting for extracting DTM from airborne LiDAR Data[J]. Remote sensing for land & resources, 2011(1): 52–56.)
- [9] 高志国. 海量点云数据滤波处理方法研究[J]. 测绘工程, 2013, 22(1): 35–38.  
(GAO Zhiguo. Research on the massive point cloud data filtering process method[J]. Engineering of surveying and mapping, 2013, 22(1): 35–38.)
- [10] 余鹏磊, 于海洋, 谢秋平, 等. 基于 RANSAC 算法的地铁隧道点云数据滤波[J]. 测绘工程, 2014, 23(8): 28–31.  
(YU Penglei, YU Haiyang, XIE Qiuping, et al. Filtering for subway tunnel point cloud data based on RANSAC algorithm[J]. Engineering of surveying and mapping, 2014, 23(8): 28–31.)
- [11] 邓辉, 蓝秋萍, 廖威, 等. 基于法向量偏差的隧道点云去噪算法[J]. 测绘工程, 2018, 27(1): 59–63.  
(DENG Hui, LAN Qiuping, LIAO Wei, et al. Tunnel point clouds denoising algorithm based on normal deviation[J]. Engineering of surveying and mapping, 2018, 27(1): 59–63.)
- [12] 琚俏俏, 程效军, 徐工. 基于椭圆拟合的隧道点云去噪方法[J]. 工程勘察, 2014, 42(9): 69–72.  
(JU Qiaoqiao, CHENG Xiaojun, XU Gong. Denoising of tunnel point cloud data based on ellipse fitting[J]. Geotechnical investigation & surveying, 2014, 42(9): 69–72.)
- [13] 程效军, 贾东峰, 刘艳萍, 等. 基于中轴线的隧道点云去噪[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2015, 48(8): 1239–1248.  
(CHENG Xiaojun, JIA Dongfeng, LIU Yanping, et al. Tunnel point cloud denoising algorithm based on centerline[J]. Journal of tongji university (natural science), 2015, 48(8): 1239–1248.)
- [14] 徐光华. 基于二次曲线拟合的隧道激光点云滤波方法及应用[J]. 测绘通报, 2015(5): 42–45, 108.  
(XU Guanghua. Laser point cloud filtering and application in tunnel deformation monitoring based on quadratic curves fitting[J]. Bulletin of surveying and mapping, 2015(5): 42–45, 108.)
- [15] 陈璋雯, 达飞鹏. 基于模糊熵迭代的三维点云精简算法[J]. 光学学报, 2013, 33(8): 161–167.  
(CHEN Zhangwen, DA Feipeng. 3D point cloud simplification algorithm based on fuzzy entropy iteration[J]. Acta optica sinica, 2013, 33(8): 161–167.)
- [16] 王银腾. 基于包围盒和最大信息相似性误差测度的点云精简[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2017.  
(WANG Yinteng. Point cloud simplification based on bounding box and maximum information similarity error measure[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2017.)
- [17] JALBA A C, ROERDINK J B T M. Efficient surface reconstruction from noisy data using regularized membrane potentials[J]. IEEE transactions on image processing, 2009, 18(5): 1119–1134.
- [18] JIANG J Y, ZHANG Z X, MING Y. The airborne Lidar points cloud filtering of complex city environment[J]. Journal of Wuhan university, 2007(5): 402–405.

(责任编辑: 刘春光 英文审校: 范丽婷)