

# 一类薄壁变截面刚架对称临界载荷稳定 问题优化算法

侯祥林<sup>1</sup>,王似巍<sup>1</sup>,张睿之<sup>1</sup>,贾连光<sup>2</sup>

(1. 沈阳建筑大学机械工程学院,辽宁 沈阳 110168;2. 沈阳建筑大学土木工程学院,辽宁 沈阳 110168)

**摘要** 目的 研究一类对称载荷下的单跨刚架临界载荷优化算法,探讨薄壁变截面刚架临界载荷的数值计算方法,以弥补解析求解困难的缺陷. 方法 通过刚架结构拆分,运用差分方法将平衡状态下非线性微分方程离散化. 以每段钢架的每个离散点挠度、柱脚弯矩和临界荷载为设计变量,构造包括未知临界荷载的目标函数,基于 Fortran - PowerStation 集成开发环境,编写无约束优化算法程序,通过等截面与变截面梁刚架具体算例进行验证. 结果 优化结果满足规定精度,证实了算法的适应性. 结论 算法考虑工程中变截面薄壁刚架结构稳定性问题,具备很好的实用性,可为工程结构临界载荷求解提供新的思路.

**关键词** 变截面刚架;临界载荷;无约束优化;薄壁结构

中图分类号 TU311;O302

文献标志码 A

## An Optimal Algorithm for Stability Analysis of Symmetrical Critical Loads of Thin-walled Frames with Variable Cross-sections

HOU Xianglin<sup>1</sup>, WANG Siwei<sup>1</sup>, ZHANG Ruizhi<sup>1</sup>, JIAN Lianguang<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang, China, 110168; 2. School of Civil Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang, China, 110168)

**Abstract:** An optimization algorithm for the critical load of a kind of single-bay frames under symmetric loadings was studied and the numerical method for the critical load of the thin-walled frame with variable cross-section was discussed to increase the efficiency for engineering problems and to offset the defect of analytic solving problems. The frame was separated, the finite difference method was used to discretize the nonlinear differential equations in equilibrium state. Used deflection of each discrete point, critical load and bending moment as design variables. The objective function contained unknown critical load had been built. In the Fortran-PowerStation environment, unconstrained gradient optimization program was compiled and the specific example of frame with constant section and variable cross-section were solved. Optimization results were satisfied accuracy.

收稿日期:2016-12-23

基金项目:国家自然科学基金项目(51578346);辽宁省自然科学基金项目(2015020129)

作者简介:侯祥林(1962—),男,教授,博士,主要从事工程力学方面研究.



将该结构的横梁与边柱分别均匀分成  $n$  段,每一段的长  $\Delta x = l/n$ ,节点处的  $x$  坐标为  $x_{1,j} = i\Delta x, i = 0, 1, 2, L, n. x_{2,j} = i\Delta x, i = 0, 1, 2, L, n.$  其对应挠度坐标为  $w_{1,ij}, i = 0, 1, 2, L, \cdots, n. w_{2,j}, i = 0, 1, 2, L, n.$  其挠曲轴线离散点坐标  $(x_{1,j}, w_{1,j}), i = 0, 1, 2, L, n. (x_{2,j}, w_{2,j}), i = 0, 1, 2, L, n.$  建立挠曲线微分方程:

$$EI(x)w'' = M(x). \tag{1}$$

套入差商公式即

$$w'' = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2}, \text{代入式(1)得微}$$

分方程:

$$EI_{1,i} = \frac{w_{1,i-1} + w_{1,i+1} - 2w_{1,i}}{\Delta x^2} + 2M + F_{cr}w_{1,i} + EI_{2,i} = \frac{w_{2,i-1} + w_{2,i+1} - 2w_{2,i}}{\Delta x^2} = 0. \tag{2}$$

为方便程序计算,特对式(2)做归一化处理得:

$$\frac{EI_{1,i}}{EI_0} \frac{w_{1,i-1} + w_{1,i+1} - 2w_{1,i}}{\Delta x^2} + \frac{2M}{EI_0} + \frac{F_{cr}w_{1,i}}{EI_0} + \frac{EI_{2,i}}{EI_0} \frac{w_{2,i-1} + w_{2,i+1} - 2w_{2,i}}{\Delta x^2} = 0. \tag{3}$$

式中:  $EI_0 = EI_{1,0}.$

容易看出式(3)为含  $w_{1,i}, i = 1, 2, \cdots, n-1; w_{2,i}, i = 1, 2, \cdots, n$  和  $F_{cr}$  的未知量总数为  $2n+1$  而方程总数为  $2n-1$  的非线性差分方程. 可知方程没有唯一解.

此时需要寻找两个方程与式(3)联立,即满足  $2n+1$  个方程组对应  $2n+1$  个未知量,从而可以对非线性方程组进行求解. 该刚架的为固定端约束,则边柱的柱脚位置没有转角,可以针对这种情况对该刚架的柱脚采用补点的方式来增加方程个数.

如图2所示,对刚架边柱柱脚进行补点  $w_{1,-1}$ ,使挠度与  $w_{1,1}$  相等,并且弯曲方向关于柱脚与地面对称即  $w_{1,-1} = w_{1,1}.$  通过二阶差分法得出该点的方程为

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n-1} [b_{1,i}(W_{1,i-1} + W_{1,i+1} - 2W_{1,i}) + m + f_{cr}w_{1,i}]^2 + \sum_{i=n}^{2n} [m + b_{2,i}(W_{2,i-1} + W_{2,i+1} - 2W_{2,i})]^2 + (2W_{1,1} - m)^2 + (W_{1,n-1} + W_{1,n} - W_{2,1} + W_{2,0})^2. \tag{11}$$

$$\frac{M}{EI_0} = \frac{w_{1,1} + w_{1,-1} - 2w_{1,0}}{\Delta x^2}. \tag{4}$$

刚架在该种变形的横梁与边柱的刚结处转角保持一致,即

$$w'_{1,n-1} = w'_{2,1}. \tag{5}$$

根据一阶差分公式中的向前差分公式,将式(5)表示为一阶差分的形式,即

$$\frac{w_{1,n-1} - w_{1,n}}{\Delta x} - \frac{w_{2,1} - w_{2,0}}{\Delta x} = 0. \tag{6}$$

在添加了式(4)与式(6)两个方程后,满足了  $2n+1$  个方程对应  $2n+1$  个未知量,即可对该非线性微分方程组进行求解.

为了简化计算. 设  $\frac{EI_{1,i}}{EI_0} = b_{1,i}, \frac{EI_{2,i}}{EI_0} = b_{2,i},$

$\frac{M\Delta x^2}{EI_0} = m, \frac{F_{cr}\Delta x^2}{EI_0} = f_{cr}, w_i = W_i,$  代入式(3)可得无量纲差分方程为

$$b_{1,i}(W_{1,i-1} + W_{1,i+1} - 2W_{1,i}) + 2m + f_{cr}w_{1,i} + b_{2,i}(W_{2,i-1} + W_{2,i+1} - 2W_{2,i}) = 0. \tag{7}$$

同理,无量纲化式(4)与式(6)后的方程为

$$2W_{1,1} - m = 0, \tag{8}$$

$$W_{1,n-1} - W_{1,n} - W_{2,1} + W_{2,0} = 0. \tag{9}$$

求解非线性方程难以运用解析方法,因此提出构造一种基于启发式搜索方法的无约束最优化求解思想.

## 2 薄壁变截面刚架临界载荷最优化方法

### 2.1 刚架临界载荷求解的最优化

变截面刚架临界荷载的求解问题可用优化问题解决<sup>[21]</sup>,描述为无约束优化:

$$\min(f(z)). \tag{10}$$

式中:  $z \in R^N$  称为动态设计变量,  $N$  为维数.  $f(z)$  为目标函数,为保证优化收敛极小,目标函数可由式(7)、式(8)和式(9)的平方和构成,表示为

其中,  $z_i = W_{1,i}, i = 1, 2, \cdots, n-1; z_{i+n} = W_{2,i}, i = 1, 2, \cdots, n; z_{N-1} = f_{cr}, z_N = m$ .

运用通用优化算法就是要寻找  $z = z^*$ , 并获得目标函数极小值  $f(z^*) \rightarrow 0$ .

通过所提出的优化算法,只需要给出刚架材料,变截面刚架截面变化函数即可通过对目标函数的优化来实现对刚架结构的临界荷载求解并得到变形位移.

2.2 最优化程序流程

刚架临界荷载的求解是通过将求解非线性方程组的问题转化为无约束优化问题<sup>[19]</sup>, 程序组成包括:①主程序;②多维 Powell 法子程序;③进退法子程序;④黄金分割法子程序;⑤目标函数子段. 依据上述搜索方法,绘制程序框图如图 3 所示.

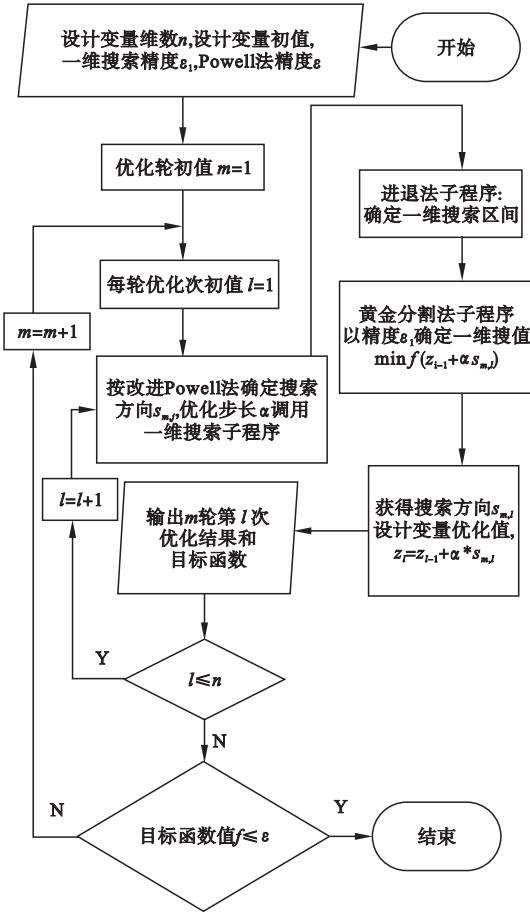


图 3 优化程序流程图

Fig. 3 Optimization program flowchart

2.3 计算精度判定条件

针对对称刚架结构,通过前后节点加密, 所对应的计算临界荷载值相对误差建立如下精度判断准则<sup>[22]</sup>.

主要评定条件:

$$\left| \frac{F_r^{(k+1)} - F_r^{(k)}}{F_r^{(k)}} \right| < \varepsilon_r.$$

(12)

辅助条件判定:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left| \frac{w^{(k+1)} - w^{(k)}}{w^{(k)}} \right| < \varepsilon_r.$$

(13)

式中:  $k = 1, 2, \cdots, N$ .

3 算例分析

3.1 薄壁等截面刚架求解算例

图 1 是两柱脚为固定约束的等截面刚架,该刚架材料的弹性模量为  $E$ ,惯性矩为  $I$ , 刚架横梁的长度为  $2l$ ,边柱的长度为  $l$ ,现对该刚架的临界荷载进行求解. 由于刚架为对称失稳,所以将该刚架取一半结构进行分析. 依据差分思想,将刚架边柱与横梁分别分段为  $n$ ,设计变量总维数  $N = 2n + 1 = 21$ ,初值取  $z_i = rand()$ ,  $i = 1, 2, \cdots, N$ . 一维搜索精度  $e_1 = 0.000\ 01$ ,Powell 多维搜索精度  $e_1 = 10^{-10}$ ,优化计算通过 5 025 轮,共 24 185 次优化计算,目标函数得到精度要求. 其计算结果列于表 1.

表 1 中  $z_{20} = -0.225\ 2$  对应的是该约束条件下刚架的临界荷载:

$$F_{cr} = z_{20} \frac{EI}{\Delta x^2} = 0.225\ 2 \frac{EI}{l^2} (10)^2 =$$

$$22.52 \frac{EI}{l^2}.$$

$z_{21} = -0.006\ 1$  对应的是该约束条件下刚架在横梁与边柱刚结点处的节点力偶:

$$M = z_{21} \frac{EI}{\Delta x^2} = -0.006\ 14 \frac{EI}{l^2} (10)^2 =$$

$$-0.614 \frac{EI}{l^2}.$$

表 1  $N=21$  等截面刚架优化计算结果

Table 1 Optimization calculation results to constant section frame when  $N=21$

动态变量	计算结果	动态变量	计算结果	动态变量	计算结果
$z_1$	0.003 1	$z_8$	0.076 5	$z_{15}$	0.253 6
$z_2$	0.014 2	$z_9$	0.043 5	$z_{16}$	0.2781
$z_3$	0.032 8	$z_{10}$	0.049 5	$z_{17}$	0.295 9
$z_4$	0.055 7	$z_{11}$	0.097 8	$z_{18}$	0.306 6
$z_5$	0.077 7	$z_{12}$	0.143 6	$z_{19}$	0.310 2
$z_6$	0.092 3	$z_{13}$	0.185 6	$z_{20}$	0.225 2
$z_7$	0.093 1	$z_{14}$	0.222 6	$z_{21}$	-0.006 1

3.2 薄壁变截面刚架求解算例

图 4 为起重重量为 20 t 的 L 型门式起重机,整体跨度为 16.5 m,起升高度为 12.5 m. 其横梁和两边柱均为箱型结构,横梁与边柱均为变截面,图中截面厚度  $t=8\text{ mm}$ ,认为两柱腿与地面采用固定约束,且两柱腿与主梁垂直,弹性模量为  $E$ ,对刚架进行稳定性分析. 受力变形式如图 1.

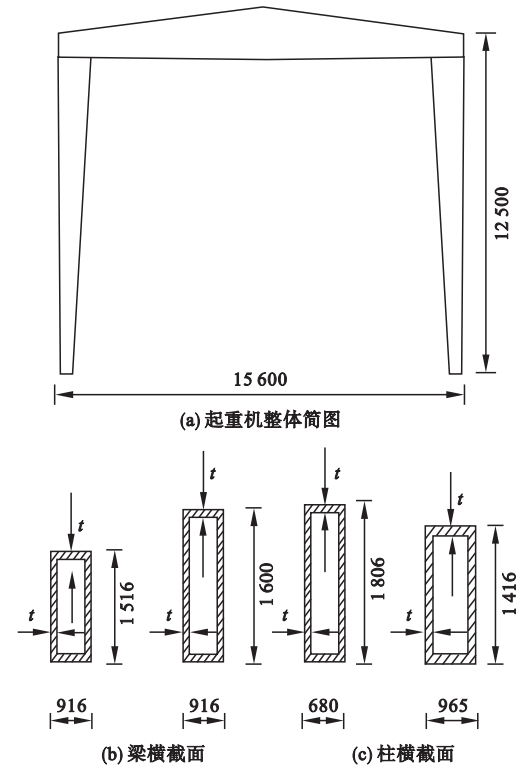


图 4 变截面刚架模型及各界面参数

Fig. 4 Variable cross - section frame model and various sections parameters

求解变截面稳定性问题,由于截面惯性

矩随着截面尺寸的变化而变化,因此弯曲刚度也是时刻变化的,关系表示如下.

边柱: $h_1(x_1)=680+\frac{965-680}{12\ 500}x_1,$

$b_1(x_1)=1\ 806+\frac{1\ 416-1\ 806}{12\ 500}x_1,$

$I_1(x_1)=\frac{1}{12}b_1(x)h_1(x)^3.$

横梁: $h_2(x_2)=1\ 516+\frac{1\ 600-1\ 516}{7\ 800}x_2,$

$I_2(x_2)=\frac{1}{12}b_2h_2^3=\frac{1}{12}[916h_2(x)^3-(916-2t)(h_2(x)-2t)^3].$

由于刚架为对称失稳,所以将该刚架取一半结构进行分析. 依据差分思想,将刚架边柱与横梁分别分段为  $n$ ,设计变量总维数  $N=2n+1=21$ ,初值取  $z_i=rand()$ ,  $i=1,2,\cdots,N$ . 一维搜索精度  $e_1=0.000\ 01$ ,Powell 多维搜索精度  $e_1=10^{-10}$ ,优化计算通过 6 509 轮,共 143 198 次优化计算,目标函数值为  $6.3\times10^{-9}$ ,目标函数得到精度要求. 优化结果见表 2.

$z_{20}=0.426\ 0$  对应的是该约束条件下刚架的临界荷载.

$$F_{cr}=z_{20}\frac{EI}{\Delta x^2}=0.426\ 0\frac{EI}{l^2}(10)^2=42.60\frac{EI}{l^2}.$$

$z_{21}=0.136\ 5$  对应的是该约束条件下刚架在横梁与边柱刚结点处的节点力偶.

$$M=z_{21}\frac{EI}{\Delta x^2}=-0.136\ 5\frac{EI}{l^2}(10)^2=$$

$-13.65 \frac{EI}{l^2}.$

为了验证算例准确性,可通过增加分段数量的方式增加计算精度.

现取  $n = 20$ , 设计变量总维数变成  $N = 2n + 1 = 41$ , 则优化计算通过 8 698 轮, 共 320 587 次优化计算, 目标函数得到精度要求. 其计算结果列于表 3.

表 2  $N = 21$  变截面刚架优化计算结果

Table 2 Optimization calculation results to variable cross-section frame when  $N = 21$

动态变量	计算结果	动态变量	计算结果	动态变量	计算结果
$z_1$	0.076 0	$z_8$	0.301 8	$z_{15}$	0.585 9
$z_2$	0.249 2	$z_9$	0.125 9	$z_{16}$	0.633 5
$z_3$	0.450 0	$z_{10}$	0.134 3	$z_{17}$	0.667 3
$z_4$	0.603 5	$z_{11}$	0.253 7	$z_{18}$	0.687 4
$z_5$	0.664 5	$z_{12}$	0.358 4	$z_{19}$	0.694 0
$z_6$	0.614 7	$z_{13}$	0.448 5	$z_{20}$	0.426 0
$z_7$	0.482 7	$z_{14}$	0.524 3	$z_{21}$	-0.136 5

表 3  $N = 41$  变截面刚架优化计算结果

Table 3 Optimization calculation results to variable cross-section frame when  $N = 41$

动态变量	计算结果	动态变量	计算结果	动态变量	计算结果
$z_1$	0.053 4	$z_{15}$	0.498 8	$z_{29}$	0.687 1
$z_2$	0.158 0	$z_{16}$	0.501 8	$z_{30}$	0.689 7
$z_3$	0.436 0	$z_{17}$	0.514 8	$z_{31}$	0.691 1
$z_4$	0.624 7	$z_{18}$	0.551 5	$z_{32}$	0.693 5
$z_5$	0.514 8	$z_{19}$	0.578 4	$z_{33}$	0.702 5
$z_6$	0.651 4	$z_{20}$	0.563 3	$z_{34}$	0.714 8
$z_7$	0.474 8	$z_{21}$	0.581 1	$z_{35}$	0.720 0
$z_8$	0.312 5	$z_{22}$	0.601 3	$z_{36}$	0.731 9
$z_9$	0.489 0	$z_{23}$	0.651 6	$z_{37}$	0.741 5
$z_{10}$	0.478 1	$z_{24}$	0.663 8	$z_{38}$	0.748 8
$z_{11}$	0.476 2	$z_{25}$	0.674 4	$z_{39}$	0.762 0
$z_{12}$	0.482 1	$z_{26}$	0.683 1	$z_{40}$	0.105 8
$z_{13}$	0.421 5	$z_{27}$	0.684 4	$z_{41}$	-0.034 1
$z_{14}$	0.448 5	$z_{28}$	0.684 7		

$F_{cr} = z_{40} \frac{EI}{\Delta x^2} = 0.105\ 8 \frac{EI}{l^2} (20)^2 =$

$42.32 \frac{EI}{l^2}.$

$M = z_{41} \frac{EI}{\Delta x^2} = -0.034\ 1 \frac{EI}{l^2} (20)^2 =$

$-13.64 \frac{EI}{l^2}.$

依据精度判断准则(12), 设定误差精度  $\varepsilon_r = 1\%$ , 则

$$\left| \frac{F_r^{(2)} - F_r^{(1)}}{F_r^{(1)}} \right| = \left| \frac{42.32 - 42.6}{42.6} \right| = 0.65\% < \varepsilon_r.$$

误差精度符合设定精度要求, 因此算法有效.



根据表 2 中数据绘制变截面刚架在临界荷载作用下的位型(见图 5)。从图中可以看出,刚架在柱脚为固定约束的情况下,达到临界状态时,通过数据绘图得出的刚架变形状态与真实情况下刚架的变形情况是一致的,也从侧面验证了程序解的正确性。

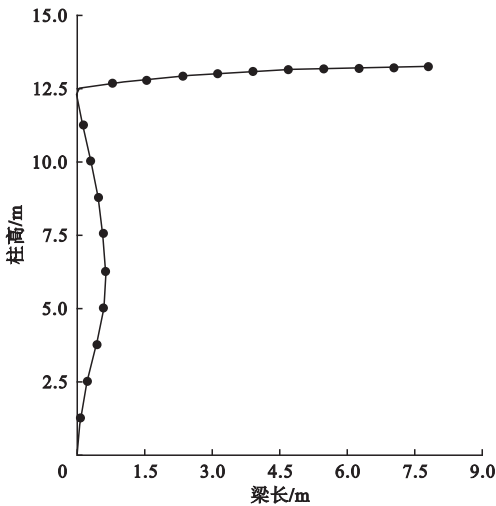


图 5 变截面半刚架的计算位型

Fig. 5 Half of variable cross-section frame deformation

## 4 结 论

(1)所述临界载荷算法,基于差分思想和优化原理,运用 Powell 等相结合的无约束优化算法转化非线性问题,编程计算了等截面刚架和变截面刚架的临界载荷算例。

(2)通过增加分段数增加节点数量的方式提高求解精度,结合程序编写,表明所述优化算法具备很好的实用性可为工程结构临界载荷求解提供新的思路。

(3)通过计算机优化算法程序设计的方式解决工程问题,在优化算法及程序语言上仍有很大创新性,因此此类工程计算方式具有很好的未来展望。

## 参考文献

[1] 单辉祖. 材料力学[M]. 北京:高等教育出版社,2009.  
(SHAN Huizu. Material mechanics[M]. Bei-

jing: Higher Education Press, 2009. )  
[2] 王焕定,章梓茂. 结构力学[M]. 北京:高等教育出版社,2010.  
(WANG Huanding, ZHANG Zimao. Structural mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2009. )  
[3] 中国建筑标准设计研究院. 门式刚架轻型房屋钢结构技术规范: GB51022—2015 [S]. 北京:中国建筑工业出版社,2015.  
(China Institute of Building Standard Design. Technical code for steel structure of light-weight building with gabled frames: GB51022—2015 [S]. Beijing: China Building Industry Press, 2015. )  
[4] EIA I M, GALAL K. Design in rectangular industrial duct plates subjected to out-of-plane pressure considering nonlinear large deformations [J]. Thin walled structures, 2014, 77: 1—7.  
[5] SORRENTINO E, SILVA P, BURGOS J C. Algorithm based on the mesh analysis for computing 2—D magneto static fields by the finite difference method [J]. International journal of electrical power & energy systems, 2014, 62: 583—585.  
[6] 武和全,辛勇. 基于神经网络的变截面梁抗撞性分析及优化设计[J]. 振动与冲击, 2010, 29 (10): 102—107, 174, 253.  
(WU Hequan, XIN Yong. Crashworthiness optimization of a thin walled rail with variable section based on artificial neural network [J]. Journal of vibration and shock, 2010, 29 (10): 102—107, 174, 253. )  
[7] 王欣,易怀军,赵日鑫,等. 一种  $n$  阶变截面压杆稳定性计算方法的研究[J]. 中国机械工程, 2014, 25 (13): 1744—1747, 1799.  
(WANG Xin, YI Huaijun, ZHAO Rixin, et al. Research on stability analysis method of  $n$ -order variable cross-section compressed bars [J]. China mechanical engineering, 2014, 25 (13): 1744—1747, 1799. )  
[8] OHSAKI M, IWATSUKI O, WATANABE H. Seismic response of building frames with flexible base optimized for reverse rocking response [J]. Engineering structures, 2014, 74: 170—179.  
[9] REN Y, DAI Q, AN R, et al. Modeling and dynamical behavior of rotating composite shafts with SMA Wires [J]. Shock and vibration, 2014 (4): 1—17.  
[10] BASAGLIA C, CAMOTIM D, SILVESTRE N. Post-buckling analysis of thin-walled steel

- frames using generalised beam theory [J]. Thin-walled structures, 2013, 62 (1): 229 - 242.
- [11] 王振山, 苏明周, 李启才, 等. 单层单跨变截面轻型门式刚架拟静力试验研究[J]. 土木工程学报, 2012(7): 24 - 30.  
(WANG Zhenshan, SU Mingzhou, LI Qicai, et al. Pseudo-static experimental study of a single-story single-bay light-weight portal frame with tapered members [J]. China civil engineering journal, 2012(7): 24 - 30.)
- [12] 梁德志, 陈雪峡. 门式刚架轻钢厂房屋盖竖向风振等效静力风荷载研究[J]. 工程力学, 2013, 30(6): 175 - 179.  
(LIANG Dezhi, CHEN Xuexia. Effective static wind load for the roof of light-weight steel structure with gable frames due to vertical wind [J]. Engineering mechanics, 2013, 30 (6): 175 - 179.)
- [13] SAKAR G, ÖZTÜRK H, SABUN CU M. Dynamic stability of multi-span frames subjected to periodic loading[J]. Journal of constructional steel research, 2011, 70(2): 65 - 70.
- [14] CACHO M. 2D frames optimization. criterion: maximum stability [J]. Applied mathematical modelling, 2017, 46: 591 - 601.
- [15] 侯祥林, 卢宏峰, 范炜, 等. 变截面承压杆的临界载荷的优化算法研究与应用[J]. 工程力学, 2013, 30: 6 - 10.  
(HOU Xianglin, LU Hongfeng, FAN Wei, et al. Optimization algorithm of critical load about variable cross-section compression bar and application [J]. Engineering mechanics, 2013, 30: 6 - 10.)
- [16] 侯祥林, 范炜, 贾连光. 变截面压杆临界载荷的迭代算法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, 43 (增刊1): 237 - 240.  
(HOU Xianglin, FAN Wei, JIAN Lianguang. The iterative algorithm of variable cross-section compression bar critical load [J]. Harbin institute of technology journal, 2011, 43 (S1): 237 - 240.)
- [17] 侯祥林, 郑夕健, 张良, 等. 薄板弯曲大变形高阶非线性偏微分方程推导与优化算法研究[J]. 物理学报, 2012, 61(18): 9 - 8.  
(HOU Xianglin, ZHENG Xijian, ZHANG Liang, et al. Study on derivation and optimization algorithm about thin plate bending large deformation higher-order nonlinear partial differential equations [J]. Acta physica sinica, 2012, 61(18): 9 - 18.)
- [18] 侯祥林, 王似巍, 王家祥, 等. 一类超静定变截面压杆临界载荷的优化算法[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2017, 33(1): 104 - 110.  
(HOU Xianglin, WANG Siwei, WANG Jiaxiang, et al. Optimization algorithm of critical load about a kind of statically indeterminate variable cross-section compression bar [J]. Journal of Shenyang jianzhu university (natural science), 2017, 33(1): 104 - 110.)
- [19] 侯祥林, 张睿之, 么凯宁, 等. 超静定变截面梁极限载荷的优化算法[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2016, 32(1): 124 - 131.  
(HOU Xianglin, ZHANG Ruizhi, YAO Kaining, et al. An optimum algorithm for limit load calculation of statically indeterminate beam with varying sections [J]. Journal of Shenyang jianzhu university (natural science), 2016, 32 (1): 124 - 131.)
- [20] 郭亚军, 易平涛. 线性无量纲化方法的性质分析[J]. 统计研究, 2008, 25(2): 93 - 100.  
(GUO Yajun, YI Pingtao. Dimensionless linear nature of the analysis method [J]. Statistical research, 2008, 25(2): 93 - 100.)
- [21] SILVA J, LIMA L, VELLASCO P. Nonlinear dynamic analysis of steel portal frames with semi-rigid connection [J]. Steel construction, 2008, 30(9): 2566 - 2579.
- [22] 王勇, 蔡自兴, 周育人, 等. 约束优化进化算法[J]. 软件学报, 2009, 20(1): 11 - 29.  
(WANG Yong, CAI Zixing, ZHOU Yuren, et al. Constrained optimization evolutionary algorithms [J]. Journal of software, 2009, 20 (1): 11 - 29.)