

# 弯曲裂缝引起 FRP 混凝土界面剥离的数值分析

黄丽华,杨志泉

(大连理工大学建设工程学部,辽宁 大连 116024)

**摘要** 目的 找出混凝土裂缝扩展对纤维增强材料 FRP 与混凝土界面粘结性能的影响规律. 方法 基于断裂力学理论,采用商业软件 ANSYS 中的界面单元模型(Cohesive Zone Model CZM),模拟素混凝土梁跨中 I 型裂缝扩展以及 FRP 与混凝土界面 II 型裂缝的扩展过程. 结果 随着混凝土裂缝的扩展,加固梁承载力出现两个峰值:第一个峰值出现在混凝土宏观裂缝扩展的起始点,此时 FRP 布的应力低于 500 MPa,FRP 与混凝土界面切应力在混凝土裂缝附近较大,其余部分切应力及界面滑移量基本为零,界面处于完全粘结状态. 第二个峰值出现在 FRP 与混凝土界面发生剥离时刻,之后界面剥离从混凝土跨中裂缝位置向梁端部扩展,加固梁的承载力保持在第二个峰值上,FRP 布应力达到 1 480 MPa,界面粘结切应力及滑移量向 FRP 端部移动,跨中完全剥离的界面,切应力降为零,滑移量保持不变. 结论 计算得到的荷载随混凝土开裂的变化趋势及峰值荷载与试验值吻合较好,说明笔者提出的数值模拟方法能较准确地预测 CFRP 加固带缝混凝土梁的承载力.

**关键词** FRP;素混凝土梁;界面粘结滑移;CZM

中图分类号 TU528.572

文献标志码 A

## Numerical Analysis of Debonding Between FRP and Concrete Induced by Intermediate Crack

HUANG Lihua, YANG Zhiquan

(Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, China, 116024)

**Abstract:** The purpose of this research is to find the effect of propagation of concrete crack on the interfacial bond-slip relationship of FRP strengthened concrete beam. Based on the theory of fracture mechanics, the interface element known as the cohesive zone model (CZM) furnished by the commercial software ANSYS is adopted to simulate the propagations of both mode-I crack in plain concrete and mode-II crack on the FRP-concrete interface at different loading levels. With the progress of concrete crack, two peak points of load occur for the strengthened beam. The first peak point of load appears at the moment of progress of macro-crack of concrete, where FRP is entirely bonded with concrete. The stress in FRP is lower than 500 MPa, and the interfacial shear stress and

收稿日期:2016-05-18

基金项目:国家自然科学基金项目(51378089);辽宁省自然科学基金项目(2014020008)

作者简介:黄丽华(1967—),女,副教授,主要从事结构工程方面研究.

slipping are close to zero except the region near concrete crack. The second peak point of load appears at the occurrence of interfacial debonding between FRP and concrete. Then, the interfacial debonding extends from the middle to the end of the beam, during which the applied load remains at the second peak value. The stress in FRP reaches to 1 480 MPa in this case. The shear stress decreases to zero and the slipping remains the maximum value in the interface when debonding occurs. It is drawn that the variation trend of load with respect to the propagation of concrete crack and the peak points of loads are well identical to the experimental results. It demonstrates that the numerical model proposed in this paper can be used to precisely predict the loading capacities of the CFRP strengthened concrete beams of pre-cracks.

**Key words:** FRP; plain concrete; interfacial bond-slip; cohesive zone model

纤维增强复合材料 (Fiber Reinforced Polymer, FRP) 在钢筋混凝土结构加固中已获得越来越广泛应用<sup>[1-4]</sup>. FRP 与混凝土之间有效传递应力是取得预期加固效果的重要保证. 实验研究及工程应用发现, 加固构件的主要破坏是 FRP 与混凝土界面的剥离破坏或者是界面附近表层混凝土的剥离破坏, 即 FRP 与混凝土界面粘结性能在 FRP 加固混凝土技术中起到关键作用<sup>[5-8]</sup>. 国内外学者对此开展了大量研究<sup>[9-11]</sup>. Y. Tao<sup>[12]</sup> 提出了 FRP - 混凝土界面粘结性能的混凝土塑性损伤模型; H. Yuan<sup>[13]</sup> 提出了 FRP 与混凝土界面硬化及软化粘结滑移规律; Lu X Z<sup>[14]</sup> 提出了已被广为使用的 FRP - 混凝土界面粘结滑移的双线性本构模型.

混凝土开裂及界面剥离均属脆性破坏, 基于断裂力学的界面单元模型 (Cohesive Zone Model, CZM) 有限元模型更能真实地模拟脆性材料裂纹的产生与扩展<sup>[15-18]</sup>. P. Cornetti<sup>[19]</sup> 建立了 FRP 端部剥离的分析粘结裂缝模型; L. D. Lorenzis<sup>[20]</sup> 推导了 FRP 端部剥离的理论解; Chen F L<sup>[21]</sup> 分析了弯曲裂缝之间 FRP - 混凝土界面的脱粘行为. 上述理论分析均研究了 FRP - 混凝土界面裂缝从开裂到扩展的全过程. 但是, 受限于严格的边界荷载条件, 上述数值解法无法推广到一般情况.

笔者针对工程中常见的 FRP - 混凝土界面剥离失效形式, 以文献 [22] 中的 5 根 CFRP 加固素混凝土梁的实验数据为依据,

建立包含 CZM 的平面有限元分析模型, 采用商业有限元计算软件 ANSYS, 开展 FRP 加固素混凝土实验梁的有限元分析, 模拟带缝素混凝土梁 I 型裂缝扩展以及 FRP - 混凝土界面 II 型裂缝的扩展过程, 研究混凝土梁跨中裂缝扩展对 FRP - 混凝土界面粘结滑移的影响. 根据加载过程中 FRP - 混凝土界面粘结应力、滑移量的变化情况, FRP 及混凝土应变分布, 进一步揭示界面剥离破坏的本质. 在有限元分析基础上结合实验结果, 验证了脆性界面有限元分析中 CZM 模型的可行性以及简化的双线性界面本构模型的可靠性.

## 1 实验概况

采用三点加载的 CFRP 加固素混凝土实验梁如图 1 所示, 试件跨长  $2L$ , 高度  $h$ , 宽度  $b_c$ , CFRP 宽度为定值  $b_f = 50$  mm. 为使素混凝土梁跨中产生 I 型裂缝, 在跨中位置预制初始裂缝高度为  $a_0$ . 在缝口沿纵向设置长为  $2l_u = 2 \times 40$  mm 的非粘结区, 以防止缝口附近出现局部应力集中引起混凝土锥形破坏. 5 根梁的尺寸及初始裂缝与梁高之比 (缝高比) 见参数表 1. CFRP 和混凝土的弹性模量分别为 250 GPa 和 29.45 GPa, 泊松比为 0.3 和 0.2, CFRP 抗拉强度为 3 916 MPa, 名义厚度为 0.167 mm. 混凝土抗压强度为 50.28 MPa, 劈拉强度为 3.61 MPa, 高度为 200 mm, 250 mm 和 300 mm 试件的抗折强度分别为 3.02 MPa, 2.95 MPa 和 2.63 MPa.

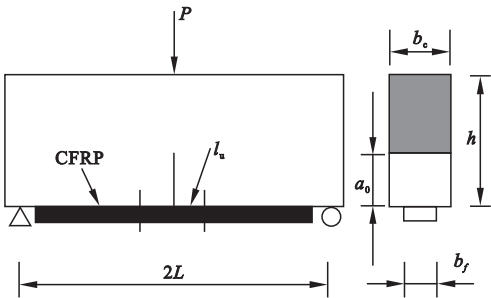


图1 CFRP 加固带缝素混凝土梁示意图

Fig.1 Profile of the CFRP strengthened pre-cracked concrete beam

表1 试件尺寸参数

Table 1 Geometric parameters of the beams		
编号	$2L \times h \times b_c/\text{mm}$	缝高比
P202	$800 \times 200 \times 150$	0.2
P203	$800 \times 200 \times 150$	0.3
P204	$800 \times 200 \times 150$	0.4
P253	$1\,000 \times 250 \times 150$	0.3
P303	$1\,200 \times 300 \times 150$	0.3

2 有限元建模

笔者基于 ANSYS 建立平面有限元模型. 采用 PLANE182 单元模拟混凝土及 CFRP. 为了建模及网格划分方便, 在保持界面刚度  $t_f E_f$  ( $t_f$  为 CFRP 厚度,  $E_f$  为弹性模量) 不变条件下, CFRP 厚度设为 1 mm.

混凝土 I 型裂缝扩展采用接触单元 TARGET169, 根据 Hillerborg A<sup>[23]</sup> 等提出的直线型混凝土虚拟裂缝模型, 黏聚力减小到零时, 混凝土裂缝张开位移  $\omega_0$  值在 0.01 ~ 0.02 mm. 笔者通过试算, 取  $\omega_0 = 0.02$  mm 时, 计算得到未加固混凝土梁承载力  $P_{\text{cal}}$  与试验值  $P_{\text{exp}}$  最接近(见表 2). 混凝土采用最大名义应力起裂准则, 当法向应力达到混凝土抗折强度时, 产生虚拟裂缝; 裂缝扩展通过位移控制, 接触分离时法向相对位移等于  $\omega_0$ . 由于混凝土梁宽度是 CFRP 宽度的 3 倍, 在平面模型中, 取混凝土抗折强度为真实混凝土抗折强度的 3 倍,  $\omega_0$  不变. 若假定同一高度处沿混凝土宽度方向裂缝张开量相同,

由此得到在任意裂缝张开量 CMOD (Crack mouth open displacement) 下, 平面模型中混凝土裂缝界面黏聚力对计算结果的影响与三维状态相同.

表2 未加固梁承载力计算值与试验值比较

Table 2 Comparison of numerical and experimental load capacity of beams without CFRP

编号	$P_{\text{cal}}/\text{kN}$	$P_{\text{exp}}/\text{kN}$	$E/\%$
C202	9.47	10.07	-5.96
C203	7.52	8.08	-6.93
C204	5.75	6.05	-4.96
C253	8.49	9.42	-9.87
C303	8.93	10.02	-10.88

注: 表中误差  $E = (P_{\text{cal}} - P_{\text{exp}}) \times 100\% / P_{\text{exp}}$ .

CFRP 与混凝土界面采用 COMTA172 单元模拟, 界面 CZM 属性采用 Lu X Z<sup>[14]</sup> 等提出的双线性粘结滑移本构关系:

$$\beta_{\omega} = \sqrt{\frac{2.25 - b_f/b_c}{1.25 + b_f/b_c}}, \tag{1}$$

$$\tau_u = 1.5\beta_{\omega}f_t, \tag{2}$$

$$S_0 = 0.0195\beta_{\omega}f_t, \tag{3}$$

$$G_f = 0.308\beta_{\omega}^2\sqrt{f_t}. \tag{4}$$

式中:  $b_f/b_c$  为 CFRP 与混凝土梁的宽度比, 根据混凝土设计规范取混凝土抗拉强度  $f_t = 0.53\sqrt{f_c}$ . 由上述公式计算得到实验梁 CFRP 与混凝土界面剪切强度  $\tau_u = 5.94$  MPa, 断裂能  $G_f = 0.7$  N/mm. CFRP 与混凝土界面采用最大名义应力起裂准则, 当界面切应力达到  $\tau_u$  时, 产生剪切裂缝; 裂缝扩展采用线性软化段和断裂能控制, 当界面剪切内能达到  $G_f$  时, 界面完全分离.

由于文中计算模型为带初始裂缝的素混凝土梁, 在裂缝扩展过程中, 除裂缝尖端外其他部分混凝土始终处于低应力状态, 故有限元分析中可假定混凝土材料为线弹性. CFRP 沿纤维方向为线弹性材料. 有限元模型中忽略了试验梁缝口附近的未粘结段, 使建模更简单.

3 计算结果分析

有限元计算得到的荷载 -  $CMOD$  曲线与试验值的比较见图 2,可以看出计算结果与实验结果基本吻合。随着混凝土裂缝扩展,荷载先后出现两个峰值: $P_{1max}$  和  $P_{2max}$ ,其大小与试验值的比较见表 3,误差主要来源于混凝土梁实验结果的离散性。 $P_{1max}$ 、 $P_{2max}$  将整个加载过程分为三个阶段:当荷载  $P$  小于  $P_{1max}$  时,随着  $CMOD$  增大,荷载近似线性增长;当跨中混凝土宏观裂缝开始扩展,荷载明显下降;随着加固梁的变形不断增加,CFRP 逐渐发挥作用,荷载又开始逐渐上升,CFRP 与混凝土界面出现软化,当 CFRP 与混凝土界面出现剥离时,荷载达到第二个峰值  $P_{2max}$ ,随着界面剥离区域不断扩展,荷载保持不变。

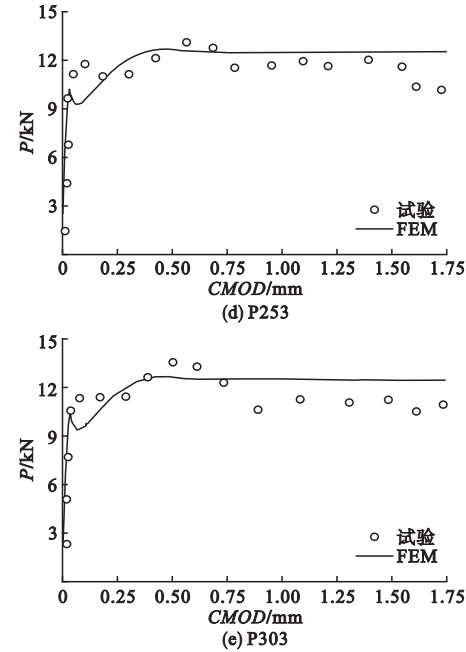
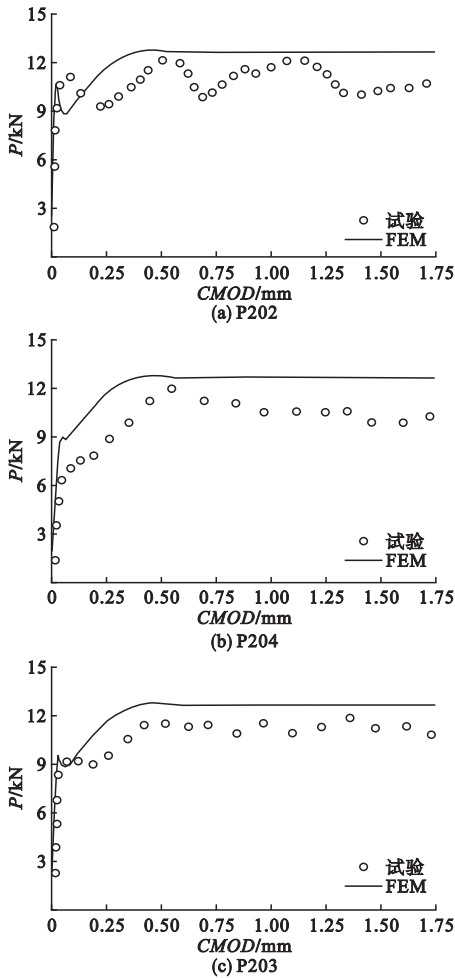


图 2 有限元与试验的荷载 -  $CMOD$  曲线比较

Fig. 2 Comparison of numerical and experimental load- $CMOD$  curves

表 3 有限元与试验的荷载峰值比较

Table 3 Comparison of numerical and experimental peak loads

试件 编号	峰值 $P_{1max}$			峰值 $P_{2max}$		
	$P_{cal}/kN$	$P_{exp}/kN$	$E/\%$	$P_{cal}/kN$	$P_{exp}/kN$	$E/\%$
P202	10.65	10.97	2.92	12.74	11.95	6.61
P203	9.52	9.07	4.96	12.74	11.66	9.26
P204	8.98	7.72	16.32	12.73	12.33	3.24
P253	10.26	11.18	8.23	12.70	12.80	0.78
P303	10.47	12.93	19.02	12.68	13.55	6.42

梁 P203 跨中 CFRP 应力随  $CMOD$  的变化见图 3,不同  $CMOD$  下 CFRP 应力沿梁长度方向的分布见图 4,其中横坐标  $d$  代表距梁端部的距离。 $CMOD = 0.03mm$  对应荷载为  $P_{1max}$ ,CFRP 处于低应力水平,最大应力为 494 MPa。当  $CMOD = 0.446 mm$ ,对应荷载为  $P_{2max}$ ,此时 CFRP 中应力达到最大值 1 480 MPa。在荷载达到  $P_{2max}$  之前,跨中 CFRP 应力随  $CMOD$  呈非线性增长,之后应力保持不变,随着  $CMOD$  不断增大,CFRP 与混凝土界面剪切裂缝由跨中向端部不

断扩展,CFRP 中最大应力由跨中向端部传递.

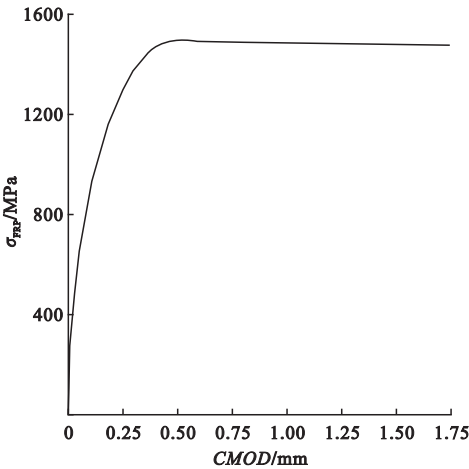


图 3 梁跨中 CFRP 应力 -  $CMOD$  曲线

粘结边缘约 55 mm,对应为虚拟裂纹尖端;之后,随着  $CMOD$  增大,界面切应力变化区域不断向端部移动.

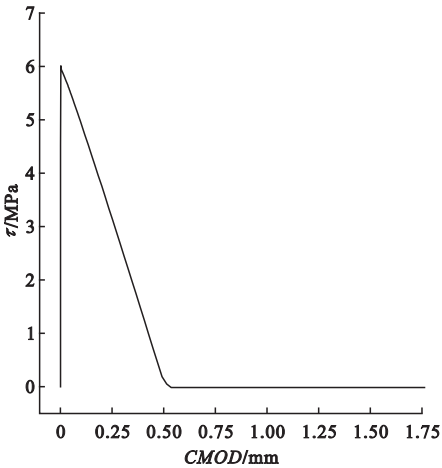


图 5 梁跨中界面切应力 -  $CMOD$  曲线

Fig. 5 Interfacial shear stress at mid-span vs.  $CMOD$

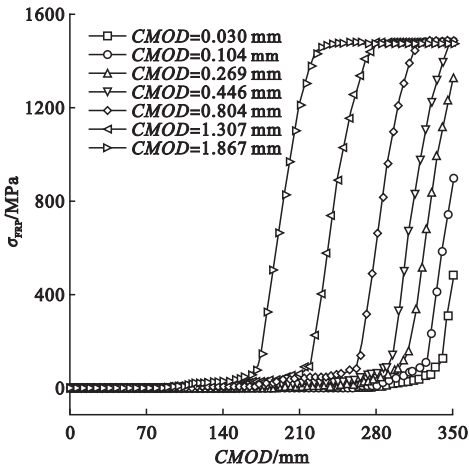


图 4 不同  $CMOD$  下 CFRP 应力

Fig. 4 Stress of CFRP under  $CMOD$ s

梁 P203 跨中 CFRP 与混凝土界面切应力随混凝土裂缝扩展的变化见图 5. 从图中可以看出,界面切应力近似为双线性变化,最大切应力为 5.94 MPa,当界面发生相对滑移时,界面切应力降为零. 裂缝扩展不同阶段下 CFRP 与混凝土界面剪切应力变化见图 6. 从图中可以看出,当  $CMOD=0.03\text{ mm}$  (荷载为  $P_{1\max}$ ) 时,除跨中外其余 CFRP - 混凝土界面切应力均很小,仍处于粘结状态;当  $CMOD=0.446\text{ mm}$  (荷载为  $P_{2\max}$ ) 时,跨中的接触界面切应力已接近零,切应力峰值距

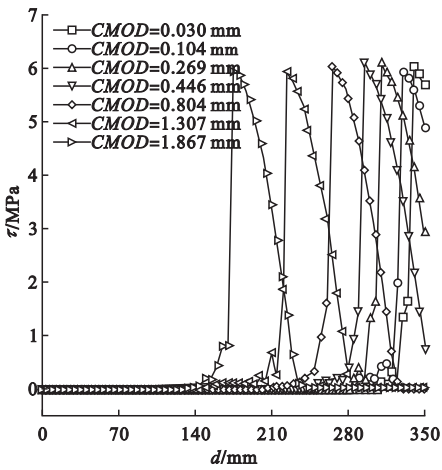


图 6 不同  $CMOD$  下界面应力分布

Fig. 6 Interfacial shear stress under  $CMOD$ s

不同  $CMOD$  下 CFRP - 混凝土界面滑移量分布见图 7. 从图中可以看出,与 CFRP - 混凝土界面切应力分布一致,界面起裂以后,滑移量随  $CMOD$  增大而增大,且滑移量不断向远端传递,每条滑移分布曲线靠近水平轴的拐点对应为当前界面切应力峰值. 需要说明的是,当界面切应力降为零以后,界面接触关系解除,ANSYS 程序不再更新该接触对的相对滑移量,所以滑移曲线上升到最大值以后出现水平段.



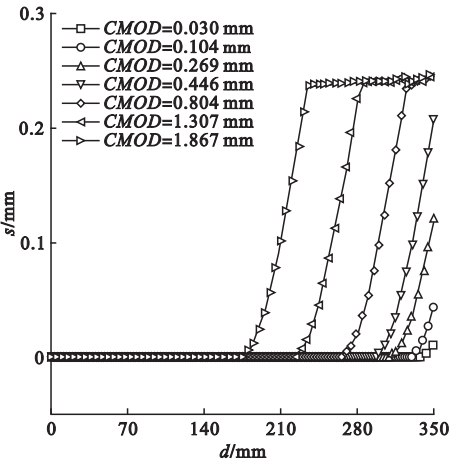


图 7 不同  $CMOD$  下梁界面滑移分布

Fig. 7 Interfacial slip under different  $CMODs$

当混凝土裂缝口宽度  $CMOD = 1.867\text{ mm}$  时,混凝土梁长度方向应力分布如图 8. 从图中可以看出,此时混凝土裂缝已扩展至梁顶部. 由于裂缝的存在,裂缝边缘混凝土因应变释放而处于低应力状态,梁底部在 CFRP - 混凝土剪切裂缝口附近存在混凝土应力集中;CFRP - 混凝土界面的破坏模式往往为靠近界面的混凝土层的破坏,Lu X Z<sup>[14]</sup> 等提出的界面粘结滑移本构模型认为,界面最大切应力与混凝土抗拉强度相关,故将这种破坏模式归为广义上的界面破坏. 由混凝土应力云图可见,裂纹周围以外混凝土始终处于低应力状态,故笔者假定混凝土为弹性材料是合理的.

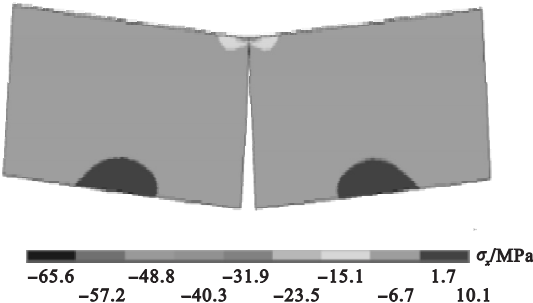


图 8  $CMOD = 1.867\text{ mm}$  时混凝土应力云图

混凝土初始裂纹尖端法向应力随  $CMOD$  的变化见图 9. 从图中可以看出,随着荷载的增大,混凝土裂缝尖端的拉应力不断

增加,由于 CFRP 的约束作用,法向应力与张开量间的非线性特征明显,最大拉应力达到 3 倍混凝土劈拉强度,此时已产生虚拟裂缝;当  $CMOD = 0.038\text{ mm}$  时,形成宏观裂缝,此时混凝土拉应力降为零. 不同  $CMOD$  下混凝土裂缝尖端法向应力分布见图 10,其中每条曲线最后端降为零以后的受压部分未给出. 从图中可以看到当荷载达到  $P_{1\max}$  ( $CMOD = 0.03\text{ mm}$ ) 时,跨中混凝土虚拟裂纹长度接近  $20\text{ mm}$ ,最大拉应力处为虚拟裂纹尖端,初始裂纹口附近混凝土黏聚力降为零,形成了宏观裂缝;当荷载达到  $P_{2\max}$  ( $CMOD = 0.446\text{ mm}$ ) 时,跨中混凝土虚拟裂纹尖端已扩展至离初始裂纹口约  $120\text{ mm}$ ;正因为加

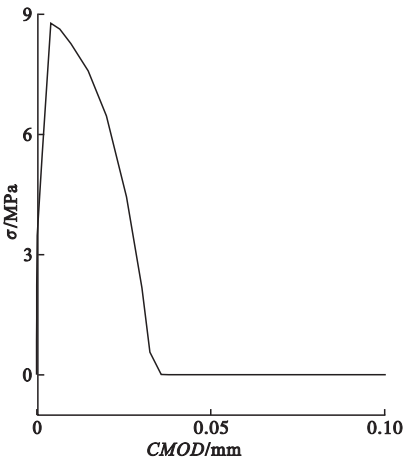


图 9 裂尖黏聚力随张开量变化

Fig. 9 Cohesive stresses with  $CMOD$

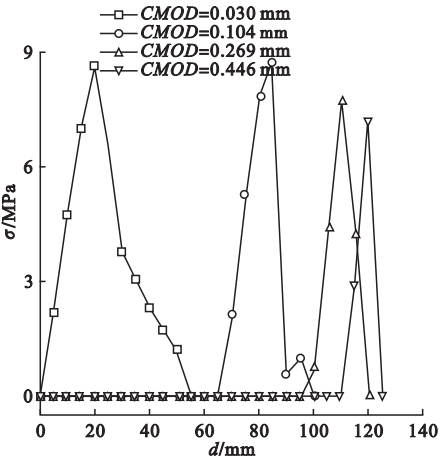


图 10 不同  $CMOD$  下混凝土裂尖黏聚力

Fig. 10 Cohesive stresses under  $CMOD$

固梁承载力达到  $P_{1\max}$  以后跨中混凝土裂缝持续向上扩展,使梁承载力下降,同时  $CMOD$  不断增大,CFRP 应力亦不断增大;当梁变形到一定程度后 CFRP 参与承载,随着  $CMOD$  增大荷载增长,在荷载达到  $P_{2\max}$  后,混凝土断裂过程区黏聚力对加固梁承载力的贡献已经很小,此时主要由 CFRP 布来承担荷载。

由计算结果可知,  $P_{1\max}$  随初始缝高比增大而降低,而  $P_{2\max}$  不受初始缝高比的影响(见图 11)。这是因为荷载达到  $P_{1\max}$  时,  $CMOD$  很小,CFRP 中应力较低而对承载力的贡献较少,此时跨中混凝土断裂过程区的黏聚力占据主导地位;而荷载达到  $P_{2\max}$  时,混凝土跨中虚拟裂缝已扩展至梁顶端附近,残余黏聚力相对于 CFRP 应力已可以忽略,CFRP 中应力已达到最大值,故初始缝高比对  $P_{2\max}$  影响不大。

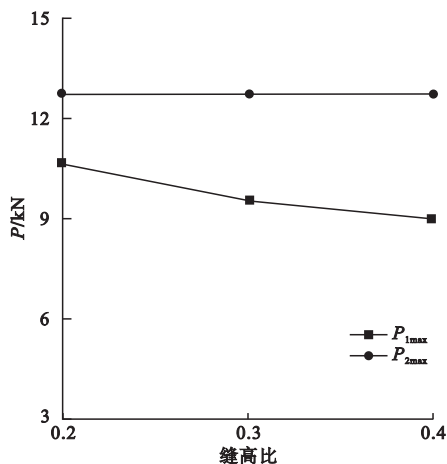


图 11 缝高比对承载力的影响

Fig. 11 Loads to seam height ratio

## 4 结 论

(1) 计算结果说明了 CZM 有限元模型可以较好地用于模拟混凝土 I 型裂缝以及 FRP 与混凝土界面 II 型裂缝的扩展情况。

(2) 采用界面单元能直观显示 CFRP - 混凝土界面的粘结滑移过程,获得不同状态下的界面切应力、滑移量、混凝土及

CFRP 应力等参数。

(3) 采用 FRP 与混凝土界面的双线性模型,计算得到的荷载随混凝土开裂的变化趋势及值荷载与试验值吻合较好,说明笔者提出的数值模拟方法能较准确地预测 CFRP 加固带缝混凝土梁的承载力。

## 参考文献

- [1] 冯鹏,叶列平,金飞飞,等. FRP 桥梁结构的受力性能与设计方法[J]. 玻璃钢/复合材料, 2011(5): 12 - 19.  
(FENG Peng, YE Lieping, JIN Feifei, et al. Mechanical behaviors and design methods of FRP bridges[J]. Fiber reinforced plastics/composites, 2011(5): 12 - 19.)
- [2] 马毓,赵启林,江克斌. 树脂基复合材料连接技术研究现状及在桥梁工程中的应用和发展[J]. 玻璃钢/复合材料, 2011(5): 10 - 14.  
(MA Yu, ZHAO Qilin, JIANG Kebin. Application and development of FRP connecting technology in bridge engineering[J]. Fiber reinforced plastics/composites, 2011(5): 10 - 14.)
- [3] 王苏岩,梁金永. FRP 约束混凝土梁跨中塑性铰延性性能分析[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2010, 26(6): 1090 - 1100.  
(WANG Suyan, LIANG Jinyong. Analytical investigation of ductility of the RC beams with plastic hinge FRP-wrapped[J]. Journal of Shenyang jianzhu university (natural science), 2010, 26(6): 1090 - 1100.)
- [4] 刘新强,刘明,由世岐. FRP 加固实心黏土砖短柱轴心受压试验研究[J]. 土木工程学报, 2009(10): 1 - 7.  
(LIU Xinqiang, LIU Ming, YOU Shiqi. Experimental study of the axial compression of short columns of solid clay bricks strengthened with FRP sheets[J]. China civil engineering journal, 2009(10): 1 - 7.)
- [5] 韩强. CFRP - 混凝土界面粘结滑移机理研究[D]. 广州:华南理工大学, 2010.  
(HAN Qiang. Study on the bond-slip mechanism of CFRP-concrete interface[D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2010.)
- [6] ARAM M R, CZADERSKI C, MOTAVALLI M. Debonding failure modes of flexural FRP-strengthened RC beams[J]. Composites part B: engineering, 2008, 39(5): 826 - 841.

- [7] CHEN F, QIAO P. Debonding analysis of FRP-concrete interface between two balanced adjacent flexural cracks in plated beams[J]. International journal of solids and structures, 2009, 46(13): 2618 – 2628.
- [8] QU H C, ZHANG P. Debonding analysis along a softening FRP-concrete interface between two adjacent cracks in plated beams[J]. Advanced materials research, 2010, 97: 1227 – 1234.
- [9] 张冬杰, 韩强, 杜修力, 等. FRP 布约束 RC 矩形空心桥墩抗震性能试验研究[J]. 振动与冲击, 2013, 32(22): 152 – 157.  
(ZHANG Dongjie, HAN Qiang, DU Xiuli, et al. Tests for a seismic performance of RC rectangular hollow bridge piers constrained with FRP[J]. Journal of vibration and shock, 2013, 32(22): 152 – 157.)
- [10] 曾宪桃, 任振华. 纤维增强塑料加固混凝土梁界面本构模型研究有关问题的分析与评价[J]. 玻璃钢/复合材料, 2014(1): 62 – 67.  
(ZENG Xiantao, REN Zhenhua. Analyses and evaluation of the problem concerning interface constitutive model of concrete beam strengthened with fiber reinforced plastic[J]. Fiber reinforced plastics/composites, 2014(1): 62 – 67.)
- [11] 周乐, 王元清, 施刚. 钢梁外包 FRP 混凝土抗弯承载力计算[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2014, 30(2): 193 – 200.  
(ZHOU Le, WANG Yuanqing, SHI Gang. Calculation of flexural capacity of steel beams strengthened with enclosed reinforced FRP concrete[J]. Journal of Shenyang jianzhu university(natural science), 2014, 30(2): 193 – 200.)
- [12] TAO Y, CHEN J F. Concrete damage plasticity model for modeling FRP-to-concrete bond behavior[J]. Journal of composites for construction, 2014, 19(1): 4001 – 4026.
- [13] YUAN H, LU X, HUI D, et al. Studies on FRP-concrete interface with hardening and softening bond-slip law[J]. Composite structures, 2012, 94(12): 3781 – 3792.
- [14] LU X Z, TENG J G, YE L P, et al. Bong-slip models for FRP sheets/plates bonded to concrete[J]. Engineering structures, 2005, 27: 920 – 937.
- [15] WU Z, YANG S, HU X, et al. Analytical solution for fracture analysis of CFRP sheet-strengthened cracked concrete beams[J]. Journal of engineering mechanics, 2010, 136(10): 1202 – 1219.
- [16] XU R Q, LIU C. CZM-based debonding simulation of cracked beams strengthened by FRP sheets[J]. Journal of engineering mechanics, ASCE, 2012, 138(2): 210 – 220.
- [17] WU Z M, FAN X L, ZHENG J J, et al. Modeling of debonding and fracture process of FRP-strengthened concrete beams via fracture mechanics approach[J]. Journal of reinforced plastics and composites, 2013, 32(22): 1733 – 1745.
- [18] HADJAZI K, SEREIR Z, AMZIANE S. Cohesive zone model for the prediction of interfacial shear stresses in a composite-plate RC beam with an intermediate flexural crack[J]. Composite structures, 2012, 94(12): 3574 – 3582.
- [19] CORNETTI P, CORRADO M, LORENZIS L D, et al. An analytical cohesive crack modeling approach to the edge debonding failure of FRP-plated beams[J]. International journal of solids and structures, 2015, 53: 92 – 106.
- [20] LORENZIS L D, ZAVARISE G. Cohesive zone modeling of interfacial stresses in plated beams[J]. International journal of solids and structures, 2009, 46(24): 4181 – 4191.
- [21] CHEN F L, QIAO P Z. Debonding analysis of FRP-concrete interface between two balanced adjacent flexural cracks in plated beams[J]. International journal of solids and structures, 2009, 46(13): 2618 – 2628.
- [22] 易富民. CFRP 加固带缝混凝土梁的断裂特性[D]. 大连: 大连理工大学, 2010.  
(YI Fumin. The fracture properties of CFRP strengthened cracked concrete beam [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2010.)
- [23] HILLERBORG A, MODEER M, PETERSSON P E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements[J]. Cement and concrete research, 1976(6): 773 – 782.