

# 行波激励下单层单跨结构地震响应解析解

李文博,刘铁林

(沈阳建筑大学土木工程学院,辽宁 沈阳 110168)

**摘要** 目的 研究地震波中频率成分对小跨度结构响应行波效应的影响,以探究小跨度结构地震行波效应的产生机理。方法 给出地震行波激励下单层单跨结构的动力平衡方程,使用相对运动法对方程进行求解;推导地震行波激励下屋面绝对位移和柱剪力的解析解,分别研究低频成分丰富和低频成分不丰富地震波激励下的峰值柱剪力。结果 地震行波激励下柱剪力解析解不仅与时间延迟有关,还与结构基频和激励频率比值的平方有关;对于低频成分丰富的地震波,行波激励下峰值柱剪力大于一致激励下峰值柱剪力;相反,对于低频成分不丰富的地震波,行波激励下峰值柱剪力要小于一致激励下峰值柱剪力。结论 结构响应地震行波效应除取决于时间延迟外,还取决于地震波中的低频成分;在低频成分丰富的地震波激励下,小跨度结构会产生行波效应,且低频成分越丰富的地震波,行波效应越显著;在低频成分不丰富的地震波激励下,不会产生行波效应。

**关键词** 小跨度结构;地震激励;解析解;行波效应;低频成分

中图分类号 TU973+.212

文献标志码 A

**引用格式:**李文博,刘铁林.行波激励下单层单跨结构地震响应解析解[J].沈阳建筑大学学报(自然科学版),2024,40(3):404-413. (LI Wenbo, LIU Tielin. Analytical solutions for earthquake responses of single-span, one-story structure to wave passage excitation[J]. Journal of Shenyang jianzhu university(natural science), 2024, 40(3): 404-413. )

## Analytical Solutions for Earthquake Responses of Single-span, One-story Structure to Wave Passage Excitation

LI Wenbo, LIU Tielin

(School of Civil Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang, China, 110168)

**Abstract:** In order to explore the mechanism of earthquake wave passage effect for small-span structure, the influence of frequency content in earthquake wave on wave passage effect is studied in this paper. The analytical solutions of structural responses to earthquake wave passage excitation for a single-span, one-story structure are given in this paper. The dynamic equilibrium equation for

收稿日期:2023-03-06

基金项目:“十三五”国家重点研发计划子课题(2018YFC1504303-05)

作者简介:李文博(1992—),男,博士研究生,主要从事结构地震响应分析等方面研究。

the structure subjected to earthquake wave passage excitation is given, and the relative motion method is adopted to solve the equation. The analytical solutions in series form of absolute displacement of the roof and column shear forces are derived respectively. The peak column shear forces for earthquake waves with sufficient and insufficient frequency contents are studied respectively. It is found that the analytical solutions of column shear forces to wave passage excitation are not only related to the time delay, but also related to the square of the ratio of structural fundamental frequency to excitation frequency. For the earthquake waves with sufficient low-frequency content, the peak column shear forces under wave passage excitation are larger than those under uniform excitation. On the contrary, the peak column shear forces under wave passage excitation are smaller than those under uniform excitation for the earthquake waves with insufficient low-frequency content. The results show that the earthquake wave passage effect for small-span structure depends not only on the time delay, but also on the low-frequency content. There are wave passage effects for small-span structures subjected to the earthquake waves with sufficient low-frequency content, and the more sufficient low-frequency content in earthquake wave, the more obvious wave passage effect. The wave passage effects will not occur for those earthquake waves in which the low-frequency contents are not sufficient.

**Key words:** small-span structure; earthquake excitation; analytical solution; wave passage effect; low-frequency content

20 世纪 60 年代, J. L. Bogdanoff 等<sup>[1]</sup>率先研究了大跨度桥梁地震响应行波效应之后, 关于大跨度桥梁或大跨度空间建筑结构等大跨度结构响应地震行波效应的研究也逐渐增多, 而小跨度建筑结构响应地震行波效应的研究相对较少。小跨度建筑结构地震行波效应的研究主要是针对行波激励下结构扭转响应方面的研究。建筑结构在非一致激励下的地震扭转响应主要由行波产生的基础扭转激励和空间变化多点激励两种激励方式产生<sup>[2]</sup>。N. M. Newmark<sup>[3]</sup>于 1969 年开展了关于基础扭转激励下建筑结构扭转响应的研究, 随后部分学者也研究了建筑结构在扭转激励下的结构响应。韩森等<sup>[4-6]</sup>研究了对称建筑结构的扭转响应, 结果表明, 在扭转激励下, 对称结构也会产生较大的扭转响应。一些学者<sup>[7-9]</sup>还研究了非对称建筑结构在扭转激励下的扭转响应, 结果表明, 在一些情况下, 扭转激励对结构响应的影响比结构不对称产生的影响更大。此外, 阳栋等<sup>[10-13]</sup>针对小跨度建筑结构, 研究了行波效应和非相干效应引起的空间变化地震多点激励下扭转响应, 结果表明, 结构固有频率对多点激励下建

筑结构扭转响应有显著影响。上述关于小跨度建筑结构扭转响应行波效应研究采用的是数值方法。刘铁林等<sup>[14]</sup>针对单层对称和单层偏心框架结构, 采用解析途径给出了正弦行波激励下结构扭转响应解析解, 并研究了激励频率对行波效应的影响, 结果表明, 激励频率在低于基频的一定范围, 激励频率越低, 柱剪力行波效应越显著。

关于地震行波激励下建筑结构纯平动响应(地震动传播和激励在同一方向)行波效应的研究比较少。M. Allam<sup>[15]</sup>采用随机方法研究了单层单跨以及单层两跨平面框架在行波激励下的结构响应, 结果表明, 即使对于跨度相对较小的平面框架, 行波效应的影响也可能是显著的。刘铁林等<sup>[16]</sup>针对多层多跨钢筋混凝土框架结构, 研究其在行波激励下的地震响应, 得到了小跨度结构在进行地震响应分析时不应忽略行波效应的结论。上述研究表明: 小跨度结构响应存在行波效应, 考虑到小跨度结构的时间延迟很小, 其行波效应的产生应该还和其他因素有关, 小跨度结构地震行波效应问题既然属于动力学问题, 其应该与地震波中的频率成分有关, 通过

查阅有关小跨度建筑结构行波效应的文献,关于频率成分对小跨度结构行波效应影响的研究未见报道。

综上所述,笔者针对一个单层单跨结构,通过解析途径研究地震波中频率成分对结构响应行波效应的影响,给出单层单跨结构在行波激励下的动力平衡方程,使用相对运动法求解方程,推导地震行波激励下屋面绝对位移及柱剪力级数形式的解析解;并利用柱剪力解析解研究地震波中频率成分对结构响应行波效应的影响。研究表明:小跨度结构地震行波效应不仅取决于时间延迟,还取决于地震波的低频成分,两者的共同作用会使小跨度结构产生地震行波效应。

1 动力平衡方程

1.1 单层单跨结构

图1为单层单跨结构,其可用作钢筋混凝土厂房或车库,也可用作平板网架屋面与柱子间铰接的厂房或加油站罩棚等,因此该结构屋面与柱子之间既可采用刚接,也可采用铰接。结构在 $x$ 方向和 $y$ 方向分别为单跨和 $N$ 跨, $x$ 方向的跨度为 $b$ ,而 $y$ 方向任一跨的跨度为 $a$ 。各柱均完全相同。地震动传播和激励方向相同,均沿 $x$ 方向。左排和右排柱子底部的地震动加速度分别为 $\ddot{u}_{gL}$ 和 $\ddot{u}_{gR}$ 。

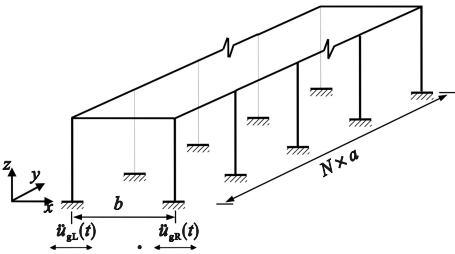


图1 单层单跨结构行波激励示意图

Fig. 1 The wave passage excitation diagram of single-span, one-story structure

1.2 动力平衡方程及求解

多点激励下关于上部结构自由度的动力平衡方程为<sup>[17]</sup>

$$M_s \ddot{u} + M_{sg} \ddot{u}_g + C_s \dot{u} + C_{sg} \dot{u}_g + K_s u + K_{sg} u_g = 0. \tag{1}$$

式中: $M_s$ 、 $C_s$ 和 $K_s$ 分别为上部结构的质量、阻尼和刚度矩阵; $M_{sg}$ 、 $C_{sg}$ 和 $K_{sg}$ 分别为上部结构与支撑点耦合的质量、阻尼和刚度矩阵; $u$ 和 $u_g$ 分别为上部结构和支撑点自由度的绝对位移向量。采用相对运动法<sup>[17-18]</sup>求解方程(1),上部结构绝对位移等于拟静力位移和动力量位移之和:

$$u = u^s + u^d. \tag{2}$$

式中: $u^s$ 和 $u^d$ 分别为上部结构自由度的拟静力和动力量位移向量。

针对图1中单层单跨结构推导地震行波激励下结构响应解析解时,如果该结构用作钢筋混凝土厂房或车库,屋面采用刚性屋面;如果用作平板网架屋面与柱子间铰接的厂房或加油站罩棚,仅需假设屋面在 $x$ 方向拉压刚度无穷大。忽略柱的质量,针对图1中结构,动力平衡方程可具体化为

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = \frac{K}{2}(u_{gL} + u_{gR}). \tag{3}$$

式中: $u$ 为屋面 $x$ 方向绝对位移; $u_{gL}$ 和 $u_{gR}$ 分别为左排支撑点和右排支撑点 $x$ 方向绝对位移; $M$ 为屋面质量; $C$ 为黏滞阻尼系数; $K = (N+1)k$ ,为所有柱 $x$ 方向侧移刚度之和,其中, $k$ 为任意柱 $x$ 方向侧移刚度。

等式两端同除以 $M$ ,式(3)可改写为

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{\omega^2}{2}(u_{gL} + u_{gR}). \tag{4}$$

式中: $\xi$ 为阻尼比; $\omega = \sqrt{K/M}$ 为结构基频。

利用相对运动法求解平衡方程,则由式(2)可得:

$$u = u^s + u^d. \tag{5}$$

式中: $u^s$ 和 $u^d$ 分别代表屋面拟静力位移和动力量位移。忽略式(4)中的惯性力和阻尼力项,利用静力计算得到拟静力位移为

$$u^s = \frac{1}{2}(u_{gL} + u_{gR}). \tag{6}$$

将式(5)和式(6)代入式(4),可得关于

动力量位移的动力平衡方程为

$$\ddot{u}^d + 2\xi\omega\dot{u}^d + \omega^2 u^d = -\frac{1}{2}(\ddot{u}_{gL} + \ddot{u}_{gR}). \quad (7)$$

对于行波激励,  $\ddot{u}_{gR}(t) = \ddot{u}_{gL}(t - b/v)$ ,  
 $u_{gR}(t) = u_{gL}(t - b/v)$ ,  $v$  为视波速。

## 2 地震行波激励下结构响应解析解

### 2.1 支撑点处地震动加速度和位移时程

由文献[19]可知地震动加速度时程和位移时程的构成公式为

$$\ddot{u}_g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_{gi} \sin\theta_i t, t \in [0, T]. \quad (8)$$

$$u_g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ -\frac{A_{gi}}{\theta_i^2} \sin\theta_i t + \frac{A_{gi}}{\theta_i} t \right], t \in [0, T]. \quad (9)$$

式中:  $T$  为地震动持续时间;  $A_{gi}$  和  $\theta_i$  分别为正弦级数第  $i$  项的系数和激励圆频率, 其计算公式分别为

$$A_{gi} = \frac{2}{T} \int_0^T \ddot{u}_g(t) \sin\theta_i t dt, \theta_i = i\pi/T, i = 1, 2. \quad (10)$$

考虑到无基线漂移地震动位移时程需满足  $u_g(T) = 0$ , 又因为  $\sin\theta_i T = 0$ , 所以由式

(9) 可得  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{gi}}{\theta_i} = 0$ , 则式(9)变为

$$u_g(t) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{gi}}{\theta_i^2} \sin\theta_i t, t \in [0, T]. \quad (11)$$

由式(8)和(11)可分别给出地震行波激励下支撑点加速度和位移时程为

当  $0 \leq t \leq b/v$  时,

$$\begin{cases} \ddot{u}_{gL} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{gi} \sin\theta_i t; \\ \ddot{u}_{gR} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} u_{gL} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{gi}}{\theta_i^2} \sin\theta_i t; \\ u_{gR} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

当  $t > b/v$  时,

$$\begin{cases} \ddot{u}_{gL} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{gi} \sin\theta_i t; \\ \ddot{u}_{gR} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{gi} \sin\theta_i (t - b/v). \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} u_{gL} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{gi}}{\theta_i^2} \sin\theta_i t; \\ u_{gR} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{gi}}{\theta_i^2} \sin\theta_i (t - b/v). \end{cases} \quad (15)$$

### 2.2 绝对位移

将式(13)和式(15)代入式(6)得到拟静力位移。将式(11)和式(14)代入式(7)并进行求解, 可得到动力量位移。依据相对运动法, 将拟静力和动力量位移求和可得到地震行波激励下屋面绝对位移级数形式的解析解:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \{ A_{gi} \omega e^{-\xi\omega t} (A \cos \varepsilon \omega t + B \sin \varepsilon \omega t) - A_{gi} [\omega A \cos \theta_i t + [(C\theta_i^2 - 1)/2\theta_i^2]] \sin \theta_i t \}, \quad 0 \leq t \leq b/v. \quad (16)$$

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \{ A_{gi} \omega e^{-\xi\omega t} [A [\cos \varepsilon \omega t + \cos \varepsilon \omega (t - b/v)] + B [\sin \varepsilon \omega t + \sin \varepsilon \omega (t - b/v)]] - A_{gi} \omega A [\cos \theta_i t + \cos \theta_i (t - b/v)] + A_{gi} [(C\theta_i^2 - 1)/2\theta_i^2] [\sin \theta_i t + \sin \theta_i (t - b/v)] \}, t > b/v. \quad (17)$$

其中,  $\varepsilon = \sqrt{1 - \xi^2}$ ,  $A = -\xi\theta_i/D$ ,  $B = (\omega^2 - \theta_i^2 + 2\xi^2\theta_i^2)/2\theta_i\varepsilon D$ ,  $C = (\theta_i^2 - \omega^2)/D$ ,  $D = (\theta_i^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\theta_i^2$ 。式(16)和式(17)前两项为瞬态响应, 后两项为稳态响应。

### 2.3 柱剪力

考虑到柱顶绝对位移与屋面绝对位移相同, 将式(16)和(17)减去支撑点处绝对位移(见式(13)和(15))再乘以柱子侧移刚度, 即可得到地震行波激励下柱剪力级数形式的解析解:

$$F_L = k \sum_{i=1}^{\infty} \{ A_{gi} \omega e^{-\xi\omega t} (A \cos \varepsilon \omega t + B \sin \varepsilon \omega t) - A_{gi} [\omega A \cos \theta_i t + [C + E[(\omega/\theta_i)^2 + F]] \sin \theta_i t] \}, \quad 0 \leq t \leq b/v. \quad (18)$$

$$F_L = k \sum_{i=1}^{\infty} \{ A_{gi} \omega e^{-\xi \omega t} [ A [\cos \varepsilon \omega t + \cos \varepsilon \omega (t - b/v)] + B [\sin \varepsilon \omega t + \sin \varepsilon \omega (t - b/v)] ] + A_{gi} [ C \sin \theta_i t - \omega A [\cos \theta_i t + \cos \theta_i (t - b/v)] + E [ (\omega / \theta_i)^2 + F ] [\sin \theta_i t - \sin \theta_i (t - b/v)] ] \} , t > b/v. \tag{19}$$

$$F_R = k \sum_{i=1}^{\infty} \{ A_{gi} \omega e^{-\xi \omega t} ( A \cos \varepsilon \omega t + B \sin \varepsilon \omega t ) - A_{gi} [ \omega A \cos \theta_i t + [ C - E [ (\omega / \theta_i)^2 + F ] ] \sin \theta_i t ] \} , 0 \leq t \leq b/v. \tag{20}$$

$$F_R = k \sum_{i=1}^{\infty} \{ A_{gi} \omega e^{-\xi \omega t} [ A [\cos \varepsilon \omega t + \cos \varepsilon \omega (t - b/v)] + B [\sin \varepsilon \omega t + \sin \varepsilon \omega (t - b/v)] ] + A_{gi} [ C \sin \theta_i (t - b/v) - \omega A [\cos \theta_i t + \cos \theta_i (t - b/v)] - E [ (\omega / \theta_i)^2 + F ] [\sin \theta_i t - \sin \theta_i (t - b/v)] ] \} , t > b/v. \tag{21}$$

式中:  $E = \omega^2 / 2D$ ,  $F = 4\xi^2 - 1$ ;  $F_L$  和  $F_R$  分别为左柱和右柱剪力。式(18)~(21)前两项为瞬态响应,后三项为稳态响应。

当视波速  $v$  无穷大时,由式(19)和(21)可得一致激励下左柱和右柱剪力相同,即

$$\bar{F} = k \sum_{i=1}^{\infty} \{ 2A_{gi} \omega e^{-\xi \omega t} ( A \cos \varepsilon \omega t + B \sin \varepsilon \omega t ) - A_{gi} ( 2\omega A \cos \theta_i t + C \sin \theta_i t ) \} . \tag{22}$$

将式(18)~(21)与式(22)进行对比可见,地震行波激励下柱剪力不仅与时间延迟  $b/v$  有关,还与  $(\omega / \theta_i)^2$  有关,而一致激励下柱剪力与两者均无关。

利用式(16)~(22)计算结构响应时不需要计算无穷多项,只需要计算有限项。利用式(10)中  $\theta_i = i\pi/T$  以及  $\theta_i = 2\pi f_i$  可得  $i = 2Tf_i$ ,且考虑到实际地震波中的最高频率  $f_i$  通常不超过 20 Hz,所以采用式(16)~(22)计算结构响应时取最大项数为  $i_{\max} = 40T$ 。式(16)~(22)中  $t$  的间隔为原始地震动记录的时间间隔。

针对图1中单层单跨结构,以加油站罩棚结构为例,在 PEER 数据库<sup>[20]</sup>中选取地震波 El centro(RSN6-H1)进行行波激励,对比采用解析解和 ABAQUS 有限元分析软件计算获得的柱剪力响应时程。罩棚采用螺栓球

节点正放四角锥网架结构,其由四根相同的钢筋混凝土柱子支撑,y方向的跨数  $N = 1$ 。x和y方向的平面尺寸分别为 24 m和27 m,x和y方向的柱间距离分别为  $b = 12\text{m}$  和  $a = 15\text{m}$ 。钢筋混凝土柱与罩棚之间采用铰接,柱高为 6.2 m,方柱横截面边长为 600 mm。钢筋密度为  $7\,800\text{ kg/m}^3$ ,混凝土弹性模量和密度分别为  $3.0 \times 10^4\text{ MPa}$  和  $2\,500\text{ kg/m}^3$ 。可计算出  $m = 8\,968.64\text{ kg}$  和  $f = 6.79\text{ Hz}$  ( $\omega = 42.65\text{ rad/s}$ )。阻尼比  $\xi$  取 0.05,视波速  $v$  取  $2\,000\text{ m/s}$ 。采用式(18)和(19)计算左柱剪力时取最大项数为  $i_{\max} = 40T = 2\,120$  (El centro波持续时间为  $T = 53\text{ s}$ )。图2为两种途径获得的左柱剪力时程曲线对比。为了清晰地展示对比结果的主要部分,横坐标时间范围为前 30 s。

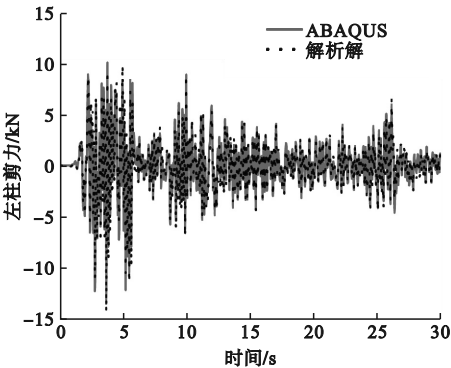


图2 解析解和 ABAQUS 软件计算左柱剪力时程对比

Fig. 2 The time history responses comparison of analytical solution and calculated results in ABAQUS for shear forces of left column

由图2可见,利用解析解计算得到的左柱剪力时程曲线与 ABAQUS 有限元分析软件计算得到的时程曲线重合,表明笔者推导出的解析解是正确的。

2.4 行波效应机理分析

考虑到地震波加速度可表示为一系列不同频率正弦波之和<sup>[19]</sup>,因此,式(18)~(21)中任一项皆为正弦行波激励下的柱剪力解析解。笔者以正弦行波激励下左柱剪力为例,通过分析峰值柱剪力与激励频率的关系研究



行波效应在频率方面的机理。为相对简化,进行分析时未考虑结构阻尼。由式(18)~(19)可给出正弦行波激励下且无阻尼时( $\xi=0$ )左柱剪力稳态解析解为

$$F_L = kA_g \left\{ \frac{[2 - (\omega/\theta)^2]}{2(\theta^2 - \omega^2)} \sin\theta t \right\}, 0 \leq t \leq \frac{b}{v}. \quad (23)$$

$$F_L = kA_g \left\{ -\frac{(\omega/\theta)^2}{2(\theta^2 - \omega^2)} \left[ \sin\theta t - \sin\theta \left( t - \frac{b}{v} \right) \right] + \frac{1}{\theta^2 - \omega^2} \sin\theta t \right\}, t > \frac{b}{v}. \quad (24)$$

式中: $A_g$ 和 $\theta$ 分别为正弦加速度系数和激励圆频率。

对于小跨度结构, $b/v$ 的值非常小,因此在 $t < b/v$ 范围内,柱剪力不会达到峰值,即峰值柱剪力出现在 $t > b/v$ 范围内。为了获得左柱峰值剪力,可将式(24)改写为

$$|F_L| = \left| \frac{kA_g \sin(\theta t + \varphi)}{\omega^2 - \theta^2} \sqrt{1 + \left[ \left( \frac{\omega}{\theta} \right)^2 - 2 \right] \sin^2 \left( \frac{\omega b}{2v} \right)} \right|. \quad (25)$$

式中: $\varphi$ 为辅助角。考虑到实际地震波内最低频率为0.063 Hz<sup>[21]</sup>,分析时考虑的最低激励圆频率为 $2\pi \times 0.063 \approx 0.396$  rad/s。考虑到 $b/v$ 的值非常小, $\sin\omega b/2v$ 可近似等于 $\omega b/2v$ 。当 $0.396 \leq \theta < \omega$ 时,由式(25)可近似给出左柱峰值剪力为

$$F_{LP} = \frac{kA_g}{\omega^2 - \theta^2} \left\{ \sqrt{1 + \left[ \left( \frac{\omega}{\theta} \right)^2 - 2 \right] \left( \frac{\omega b}{2v} \right)^2} \right\}. \quad (26)$$

对式(26)中的根号项进行泰勒展开可得:

当 $0.396 \leq \theta < \omega/\sqrt{(2v/\omega b)^2 + 2}$ 时,

$$F_{LP} = \frac{kA_g}{2v\theta} \left\{ 1 + \frac{1}{2[(\omega/\theta)^2 - 2](\omega b/2v)^2} \right\}. \quad (27)$$

当 $\omega/\sqrt{(2v/\omega b)^2 + 2} \leq \theta < \omega$ 时,

$$F_{LP} = kA_g \left\{ \frac{2 + [(\omega/\theta)^2 - 2](\omega b/2v)^2}{2(\omega^2 - \theta^2)} \right\}. \quad (28)$$

将式(27)对 $\theta$ 进行求导可知其导函数为负值,表明当 $0.396 \leq \theta < \omega/\sqrt{(2v/\omega b)^2 + 2}$ 时,左柱峰值剪力随激励频率增大而逐渐减小。将式(28)对 $\theta$ 进行求导可得左柱峰值柱剪力存在一个极小值,极小值处激励频率表达式为

$$\theta_{\min} = \omega \left[ \frac{(\omega b/v)^2 - (\omega b/v) \sqrt{8 - (\omega b/v)^2}}{2(\omega b/v)^2 - 8} \right]^{1/2}. \quad (29)$$

由式(26)可得,当 $\theta$ 趋近于 $\omega$ 时,峰值柱剪力趋近于无穷大。综上,当 $0.396 \leq \theta < \omega$ 时,左柱峰值剪力随着激励频率的增大先降低后升高到无穷大。

由式(25)可得 $\theta > \omega$ 时左柱峰值剪力为

$$F_{LP} = \frac{kA_g}{\theta^2 - \omega^2} \sqrt{1 + \left[ \left( \frac{\omega}{\theta} \right)^2 - 2 \right] \sin^2 \left( \frac{\omega b}{2v} \right)}. \quad (30)$$

由式(30)可得当 $\theta$ 趋近于 $\omega$ 时,峰值柱剪力趋近于无穷大。当 $\theta > \omega$ 时,由式(30)可得左柱峰值剪力随着激励频率增大而逐渐降低。当 $\theta$ 趋近于无穷大时,由式(30)易得柱剪力峰值趋近于零。

当 $v$ 趋近于无穷大时,由式(25)可给出一致激励下左柱峰值剪力:

$$\bar{F}_p = \begin{cases} \frac{kA_g}{\omega^2 - \theta^2}, & \theta < \omega; \\ \frac{kA_g}{\theta^2 - \omega^2}, & \theta > \omega. \end{cases} \quad (31)$$

当 $0.396 \leq \theta < \omega$ 时,将式(26)中 $F_{LP}$ 除以式(31)左式中的 $\bar{F}_p$ ,可得当 $\theta = \sqrt{2}\omega/2$ 时,行波激励和一致激励下左柱峰值剪力相等。由式(26)和式(31)得出:当 $\theta < \sqrt{2}\omega/2$ 时, $F_{LP} > \bar{F}_p$ ;当 $\sqrt{2}\omega/2 < \theta < \omega$ 时, $F_{LP} < \bar{F}_p$ 。当 $\theta > \omega$ 时,由式(30)~(31)得出: $F_{LP} \leq \bar{F}_p$ 。

基于上述分析,可分别给出行波激励和一致激励下左柱峰值剪力与激励频率在 $\theta \geq 0.396$ 范围下的关系曲线示意图,如图3所示。

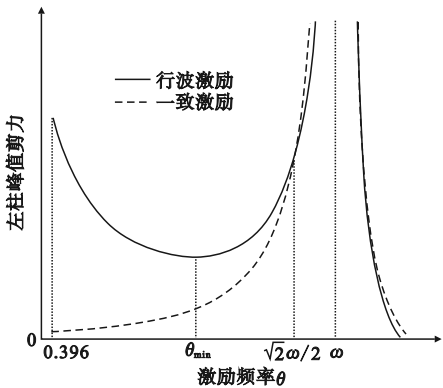


图3 左柱峰值剪力与激励频率关系示意图  
Fig.3 The relationship between peak shear forces of left column and excitation frequency

由图3可见,当激励频率低于 $\sqrt{2}\omega/2$ 时,行波激励下左柱峰值剪力大于一致激励下左柱峰值剪力,激励频率越低,行波激励比一致激励下左柱峰值剪力越大。也就是说,对于图1中单层单跨结构,且正弦波传播和激励方向均沿短轴方向情况下,当激励频率低于 $\sqrt{2}\omega/2$ 时,柱剪力存在行波效应,激励频率越低,行波效应越显著。

3 地震波中频率成分对行波效应影响

针对图1中单层单跨结构,并以钢筋混凝土车库为例,研究地震波中频率成分对单层结构行波效应的影响。当图1中结构为单层钢筋混凝土车库时,分别取 $N=6$ 、 $a=4\text{ m}$ 和 $b=9.8\text{ m}$ ,刚板厚 $120\text{ mm}$ 。与 $x$ 轴平行的梁截面长 $\times$ 宽为 $700\text{ mm}\times 300\text{ mm}$ ,与 $y$ 轴平行的梁截面长 $\times$ 宽为 $400\text{ mm}\times 250\text{ mm}$ 。柱高为 $5.3\text{ m}$ ,方柱横截面边长为 $450\text{ mm}$ 。钢筋混凝土密度为 $2\,500\text{ kg/m}^3$ ,混凝土弹性模量为 $3.0\times 10^4\text{ MPa}$ 。可计算出 $m=1.08\times 10^5\text{ kg}$ , $f=5.21\text{ Hz}$ ( $\omega=32.71\text{ rad/s}$ ),阻尼比 $\xi$ 取 $0.05$ 。

3.1 低频成分对柱剪力行波效应影响

在2.4节已知对于图1中单层单跨结构,当激励频率低于 $\sqrt{2}\omega/2$ 时,柱剪力存在行波效应,因此笔者将由低于 $\sqrt{2}\omega/2$ 的激励频

率构成的频率成分称之为低频成分。为研究低频成分对行波效应的影响,利用式(18)~(21)获得不同频率成分的波行波激励下柱剪力,将式中第 $i$ 项以上所有项求和可得到频率成分高于 $\theta_i\text{ rad/s}$ ( $i=1,2,\dots$ )的波激励下柱剪力,因此 $\theta_i$ 也可称为截止频率 $\theta_c$ 。地震波Kocaeli(RSN1176)在PEER数据库中被选取。

图4为不同视波速时,单层车库在Kocaeli波作用下的左柱峰值剪力和 $\theta_c/\omega$ 关系曲线。考虑到实际地震波频率范围通常为 $0.1\sim 20\text{ Hz}$ ,因此 $\theta_c$ 的取值范围取 $0.2\pi\sim 40\pi\text{ rad/s}$ ,又结构基频 $\omega$ 为 $32.71\text{ rad/s}$ ,所以图4中 $\theta_c/\omega$ 的范围取 $0.01\sim 3.5$ 。随着 $\theta_c/\omega$ 值的降低,生成波中的低频成分由不丰富逐渐越来越丰富。由2.3节已知当最高频率为 $20\text{ Hz}$ 时,式(18)和式(19)取前 $40T$ 项求和即可计算左柱剪力,又Kocaeli波持续时间为 $T=35\text{ s}$ ,因此计算时取最大项数为 $1\,400$ 。

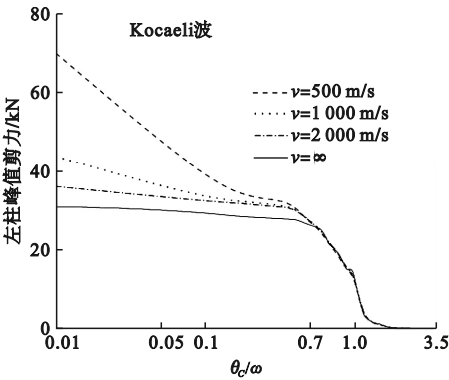


图4 左柱峰值剪力与 $\theta_c/\omega$ 关系曲线  
Fig.4 The relationship between peak shear forces of left column and  $\theta_c/\omega$

由图4可见,当 $\theta_c$ 大于 $0.7\omega$ 时,行波激励和一致激励下( $v=\infty$ )左柱峰值剪力基本相同。当 $\theta_c$ 小于 $0.7\omega$ 时,随着 $\theta_c/\omega$ 值的降低(生成波低频成分越来越丰富),行波激励与一致激励左柱峰值剪力间差值逐渐增大,也就是行波效应逐渐显著。上述现象主要是由于式(18)~(21)中的 $(\omega/\theta_i)^2$ 项导致的。

图4表明,生成的低频成分丰富波会使结构产生行波效应,低频成分不丰富的波不会产生行波效应。对于低频成分丰富的波,即使视波速不太大,柱剪力也会产生行波效应。在相同视波速时,低频成分越丰富的波,行波效应越显著。对于低频成分不丰富的波,即使视波速不太小,柱剪力也不会产生行波效应。

3.2 不同频率成分地震波激励下柱剪力行波效应分析

通过2.4节峰值柱剪力与激励频率关系

的研究以及3.1节人工生成不同频率成分波行波效应的分析,观察到低频成分丰富波会产生行波效应,低频成分不丰富波不会产生行波效应;对于低频成分丰富的波,低频成分越丰富,行波效应越显著。笔者在PEER数据库中选取三类频率成分不同的实际地震波,研究低频成分丰富程度对单层钢筋混凝土车库行波效应的影响规律。图5~图7分别为三类地震波的加速度幅值谱,每类各三条地震波,横坐标是激励频率 $\theta_i$ 与车库的结构基频 $\omega$ 之比。

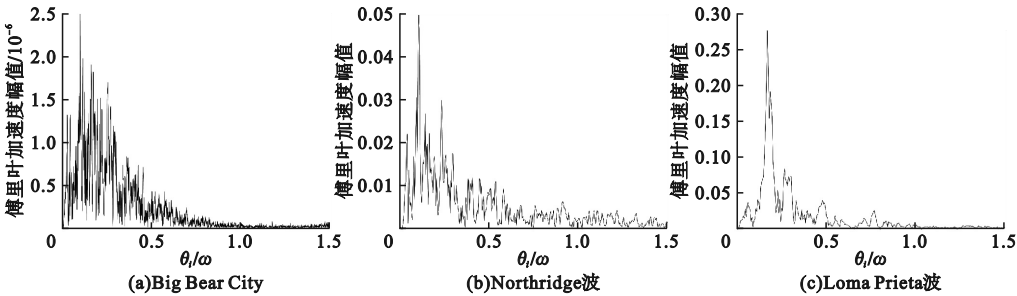


图5 第一类地震波傅里叶加速度幅值谱

Fig. 5 Fourier acceleration amplitude spectra for the first kind earthquake wave

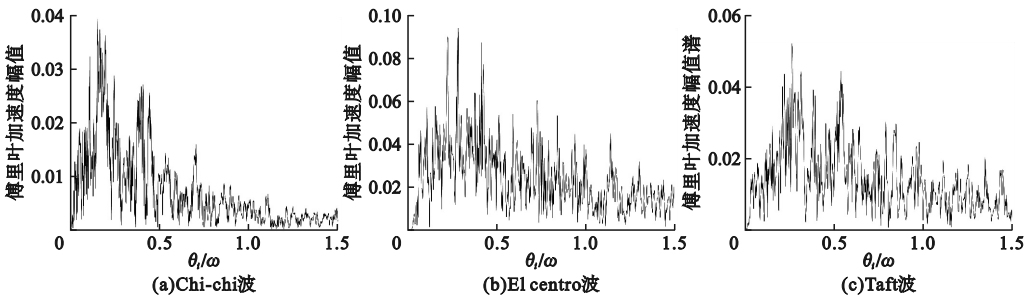


图6 第二类地震波傅里叶加速度幅值谱

Fig. 6 Fourier acceleration amplitude spectra for the second kind earthquake wave

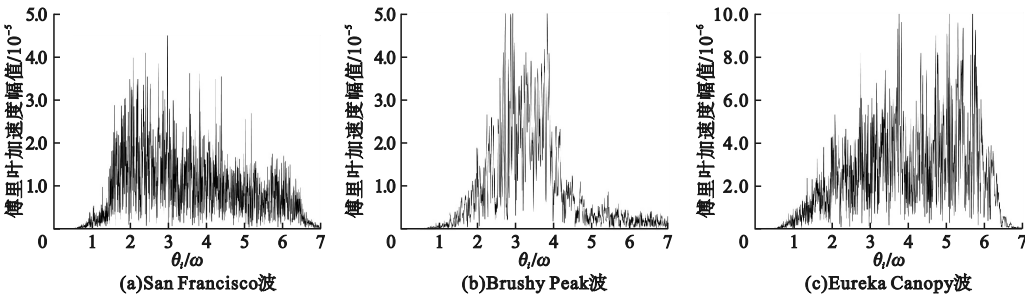


图7 第三类地震波傅里叶加速度幅值谱

Fig. 7 Fourier acceleration amplitude spectra for the third kind earthquake wave



由图5可见,第一类三条地震波分别为 Big Bear city 波(RSN8416)、Northridge 波(RSN1043)和 Loma Prieta 波波(RSN732),这三条地震波幅值谱中的主要频率均低于 $\sqrt{2}\omega/2$ ,也就是说,其低频成分是丰富的。而对于图6中的第二类地震波,即 Chi-chi 波(RSN1182)、El Centro 波(RSN6)和 Taft 波(RSN15),它们的部分主要频率低于 $\sqrt{2}\omega/2$ ,但还有另一部分主要频率要高于 $\sqrt{2}\omega/2$ 。第二类地震波的低频成分虽然没有第一类地震波丰富,但其也包含较为丰富的低频成分。至于图7中的 San Francisco 波(RSN20298)、Brushy Peak 波(RSN21023)和 Eureka Canopy 波(RSN21320),它们的主要频率均高于 $\sqrt{2}\omega/2$ ,其低频成分显然是不丰富的。对于图5和6中低频成分丰富的地震波,幅值谱中主要频率越接近于坐标原点代表地震波中的低频成分越丰富。

图8为单层车库在上述9条地震波激励下,行波激励和一致激励左柱峰值剪力之比与视波速关系曲线。视波速的范围是500~3 000 m/s。式(18)~(19)取前40  $T$ 项求和计算地震波激励下左柱剪力, $t$ 的间隔为原始地震动记录的时间间隔。

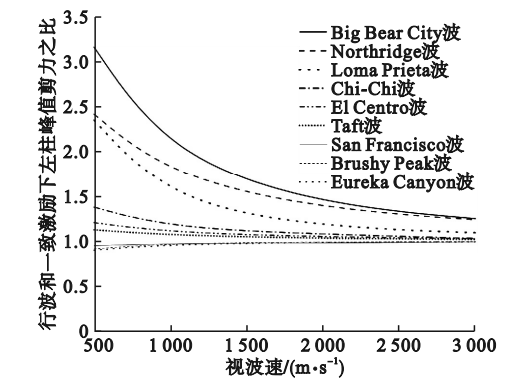


图8 行波激励和一致激励下左柱峰值剪力之比  
Fig.8 The ratios of peak shear forces of left column under wave passage excitation and uniform excitation

由图8可见,对于选用的前两类地震波,行波激励和一致激励峰值柱剪力之比大于1,且比值随视波速减小而增大。在相同

视波速时,第一类地震波比第二类地震波比值要大。这表明在这两类地震波激励下柱剪力存在行波效应,低频成分越丰富的地震波,行波效应越显著。而在第三类地震波激励下,峰值柱剪力之比小于1,即不存在行波效应。对于右柱峰值剪力,与图8类似。

由图5~图8可见,当地震波加速度幅值谱中存在低于 $\sqrt{2}\omega/2$ 的主要频率时,柱剪力会产生行波效应。当地震波加速度幅值谱中的主要频率均高于 $\sqrt{2}\omega/2$ 时,柱剪力不会产生行波效应。也可以说,在低频成分丰富的地震波作用下,结构会产生行波效应;在低频成分不丰富的地震波作用下,不会产生行波效应。对于低频成分丰富的地震波,在相同时间延迟情况下,幅值谱中主要频率越接近坐标原点,也就是低频成分越丰富,行波效应越显著。小跨度结构行波效应不仅取决于时间延迟,还取决于地震波中的低频成分。当低频成分丰富时,即使时间延迟不大(视波速不小),柱剪力也会产生地震行波效应。事实上,在低频成分和时间延迟的共同作用下,小跨度结构产生地震行波效应。

4 结 论

(1)给出了地震行波激励下单层单跨结构响应的解析解;地震行波激励下柱剪力不仅与时间延迟有关,还与结构基频和激励频率比值的平方有关。

(2)当地震波中低于 $\sqrt{2}/2$ 倍结构基频的频率成分丰富时,小跨度结构会产生行波效应;当地震波中低于 $\sqrt{2}/2$ 倍结构基频的频率成分不丰富时,不会产生行波效应;对于低频成分丰富的地震波,低频成分越丰富,行波效应越显著。

(3)小跨度结构地震行波效应不仅取决于时间延迟,还取决于地震波的低频成分;在低频成分和时间延迟的共同作用下,小跨度结构产生地震行波效应。

## 参考文献

- [1] BOGDANOFF J L, GOLDBERG J E, SCHIFF A J. The effect of ground transmission time on the response of long structures [J]. Bulletin of the seismological society of America, 1965, 55 (3): 627–640.
- [2] HAO H. Response of two-way eccentric building to nonuniform base excitations [J]. Engineering structures, 1998, 20(8): 677–684.
- [3] NEWMARK N M. Torsion in symmetrical buildings [C]//Proceedings of the fourth world conference on earthquake engineering. Santiago, Chile: [s. n.], 1969: 19–32.
- [4] 韩森, 王延森, 杜红凯, 等. 转动地震动对隔震结构动力响应的影响分析[J]. 振动与冲击, 2022, 41(10): 133–139.  
(HAN Miao, WANG Yansen, DU Hongkai, et al. Influence of rotational ground motions on the dynamic responses of isolated structures [J]. Journal of vibration and shock, 2022, 41(10): 133–139.)
- [5] CAO Y, MEZA-FAJARDO K C, MAVROEIDIS G P, et al. Effects of wave passage on torsional response of symmetric buildings subjected to near-fault pulse-like ground motions [J]. Soil dynamics and earthquake engineering, 2016, 88: 109–123.
- [6] 陈向上, 谭品峰, 张俊华. 地震波扭转加速度的计算及其在框架结构中的应用[J]. 河北工业大学学报, 2009, 38(3): 114–118.  
(CHEN Xiangshang, TAN Pinfeng, ZHANG Junhua. The calculation of torsional acceleration of seismic wave and the application in frame structure [J]. Journal of Hebei university of technology, 2009, 38(3): 114–118.)
- [7] 王昌盛, 徐家云. 考虑地面转动分量的双向偏心隔震结构减震性能分析[J]. 科学技术与工程, 2019, 19(12): 271–277.  
(WANG Changsheng, XU Jiayun. Analyses on vibration absorption performance of bidirectional eccentric seismic isolation structure considering ground rotational component [J]. Science technology and engineering, 2019, 19(12): 271–277.)
- [8] JUÁREZ M, AVILÉS J. Effective eccentricity due to the effects of structural asymmetry and wave passage [J]. Engineering structures, 2008, 30(3): 831–844.
- [9] 裴星洙, 张立, 廖述清, 等. 单层偏心结构平扭耦合地震反应分析[J]. 建筑结构, 2005, 35(11): 33–35.  
(PEI Xingzhu, ZHANG Li, LIAO Shuqing, et al. Analysis of coupling response between translation and torsion of one-story asymmetric structure under earthquake [J]. Building structure, 2005, 35(11): 33–35.)
- [10] 阳栋, 王志亮. 混凝土框架结构多点输入随机地震响应分析[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2013, 36(5): 599–603.  
(YANG Dong, WANG Zhiliang. Analysis of stochastic seismic response of concrete frame structure under multiple point excitation [J]. Journal of Hefei university of technology (natural science), 2013, 36(5): 599–603.)
- [11] 张猛, 赵桂峰, 马人乐, 等. 随机地震多点激励作用下对称结构的扭转效应[J]. 郑州大学学报(工学版), 2011, 32(2): 54–58.  
(ZHANG Meng, ZHAO Guifeng, MA Renle, et al. Torsional response of symmetric building structures due to multi-support random seismic excitations [J]. Journal of Zhengzhou university (engineering science), 2011, 32(2): 54–58.)
- [12] HEREDIA-ZAVONI E, LEYVA A. Torsional response of symmetric buildings to incoherent and phase-delayed earthquake ground motion [J]. Earthquake engineering and structural dynamics, 2003, 32(7): 1021–1038.
- [13] HAO H. Torsional response of building structures to spatial random ground excitations [J]. Engineering structures, 1997, 19(2): 105–112.
- [14] 刘铁林, 杨越, 李文博. 正弦行波激励下单层偏心框架结构扭转响应的解析解[J]. 地震工程与工程振动, 2022, 42(1): 46–55.  
(LIU Tielin, YANG Yue, LI Wenbo. Analytical solutions for torsional response of single-story symmetric frame structure subjected to sinusoidal wave passage excitation [J]. Earthquake engineering and engineering dynamics, 2022, 42(1): 46–55.)
- [15] ALLAM M. Multiple support excitations of open-plane frames by a filtered white noise and soil-structure interaction [J]. Journal of sound and vibration, 2010, 329(20): 4212–4226.
- [16] 刘铁林, 陈文博, 姜迎春. 行波激励下二维框架结构地震响应分析[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2012, 28(6): 981–987.  
(LIU Tielin, CHEN Wenbo, JIANG Yingchun. Earthquake response analyses of plane frame structures under wave passage excitation [J]. Journal of Shenyang jianzhu university (natural science), 2012, 28(6): 981–987.)
- [17] CHOPRA A K. Dynamics of structures theory and applications to earthquake engineering [M]. 4th ed. NJ, American: Pearson Education, 2007: 388–389.
- [18] LÉGER P, IDÉ I M, PAULTRE P. Multiple-support seismic analysis of large structures [J]. Computers and structures, 1990, 36(6): 1153–1158.
- [19] 李文博, 刘铁林, 王宇. 地震动加速度、速度和位移时程的构成[J]. 工程力学, 2020, 37(增刊1): 164–167.  
(LI Wenbo, LIU Tielin, WANG Yu. Compositions of time histories of acceleration and velocity and displacement of ground motion [J]. Engineering mechanics, 2020, 37(S1): 164–167.)
- [20] DAVIS H. Peer ground motion database [DB/OL]. Berkeley: University of California. <https://ngawest2.berkeley.edu/>.
- [21] International Organization for Standardization. Guidance for the evaluation of the response of occupants of fixed structures, especially buildings and off-shore structures, to low-frequency horizontal motion (0.063 to 1 Hz): ISO 6897-1984 (E) [S]. Switzerland: International Organization for Standardization, 1984.  
(责任编辑: 刘春光 英文审校: 范丽婷)