

# 一种拟合三维复杂螺旋刀具轨迹 NURBS 插值逼近方法

邓华波,王玮琪,梁务宇,刘思远

(沈阳建筑大学机械工程学院,辽宁 沈阳 110168)

**摘要** 目的 提出一种基于非均匀有理 B 样条拟合的空间螺旋刀具路径整体插值逼近方法,解决曲面弧度急变产生的刀具路径插值拟合误差较大的问题。**方法** 通过解析几何特征,找出拟合误差较大的型值点,在合适位置插入适量的虚拟数据点,计算插入数据点后的曲线拟合误差,并与误差期望值进行比较,若不满足期望误差值则继续插入虚拟数据点。**结果** 拟合得到的空间曲线逐渐逼近原始型值点,拟合误差符合工况要求,计算量较小。**结论** 笔者所提方法以较少计算量拟合曲线,能准确表达刀具路径的参数,适用于曲率急变的空间曲线或曲面拟合的刀具轨迹规划工作。

**关键词** 非均匀有理 B 样条;空间螺旋曲线拟合;刀具路径;插值逼近

中图分类号 TU391

文献标志码 A

## NURBS Interpolation Approximation Method for 3D Complex Helical Tool Path Fitting

DENG Huabo, WANG Weiqi, LIANG Wuyu, LIU Siyuan

(School of Mechanical Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang, China, 110168)

**Abstract:** This paper proposed a method for the global spiral tool path interpolation based on non-uniform rational B-spline fitting, which can solve the problem of fitting error caused by the sharp change of the tool path. By analyzing geometric features, type value points with larger fitting errors were found out, and then the appropriate amount of virtual data points were inserted at the appropriate positions. The fitting error was calculated after inserting data points and compared with the expected value of the error. If the expected error value is not achieved, the above work of inserting data points and calculating error will continue. The space curve obtained by fitting approximates the original value points gradually, and the fitting error meets the requirements of the working conditions with less computation. The method proposed by the author can accurately express the parameters of the tool path with less computation, which is suitable for the path planning of space curve or space surface fitting with sharp curvature change.

收稿日期:2020-04-29

基金项目:国家自然科学基金项目(52175107,51675353)

作者简介:邓华波(1974—),男,副教授,博士,主要从事数控加工及机器人化数控设备方面研究。

**Key words:** non-uniform rational B-spline; space spiral curve fitting; tool path; interpolation approximation

航空、航天、航海领域中所用的叶轮叶片的加工要求加工精度高、加工表面光顺等特点以实现设备行驶过程中的噪声减小<sup>[1-2]</sup>,但由于此类零件形状通过空气动力学等复杂公式计算得到,零件表面极为复杂,一旦其数控加工刀具路径规划不合理,将导致机床加工出的零件误差较大、表面不光滑。因此,很多学者在上位机进行数控加工轨迹的规划及刀具速度、刀轴矢量的优化<sup>[3-4]</sup>,然后后处理生成 G 代码或采用 NURBS 插补器加工,进而解决加工时的加工精度和表面光顺问题。也有学者通过对曲面拟合的方式求解复杂曲面数控加工的刀具路径规划问题,在曲面造型中拟合精度要求较高<sup>[5-6]</sup>,精加工叶片时生成的刀具路径是的空间螺旋曲线,加工时无退刀、无抬刀、省时<sup>[7]</sup>。以往学者大多在平面上进行曲线拟合<sup>[8-10]</sup>,而空间复杂螺旋曲线投影至平面会产生变形导致拟合结果较差,从而影响刀具路径规划效果。故笔者在数控加工路径规划中直接对复杂空间螺旋曲线进行三维空间拟合。

空间曲线拟合方法中一般通过最小二乘法<sup>[11-13]</sup>选择部分数据点经过插值反求得到拟合曲线并计算拟合误差,若拟合精度没达到要求,则增加数据点的数量重新插值并计算拟合误差,直到达到拟合误差要求为止。很多学者采用遗传算法、粒子群算法等对曲线最小二乘法逼近拟合进行优化<sup>[14-15]</sup>,但在空间中,逼近算法容易陷入局部最优解,导致运算量庞大<sup>[16-17]</sup>。S. Tulsyan 等<sup>[18]</sup>提出了一种拼接方法,将相邻的线性导轨段之间插值同步的五次 B 样条用来平滑刀轴矢量位置和方向。该方法中,公式参数的连续性对曲线的连续性有很大的影响,拼接后需要降阶,并且五次 B 样条的公式过于复杂,计算基函数时计算量大,且 B 样条在描述非抛物线时会产生一定的误差。SHEN Liyong

等<sup>[19]</sup>给出了一种利用三次 Bezier 样条曲线在给定参数区间逼近的方法,由于 Bezier 样条灵活特性,改动一个控制点,全部控制点会发生变化,会导致在误差计算时的计算量大,效率低。NURBS 技术是目前国际标准组织(ISO)规定的表示自由型曲线曲面的唯一国际标准。工程中一般使用  $C^2$  连续的三次 NURBS 曲线进行拟合,拟合结果光顺、计算量小、计算快、精度高。但  $C^2$  连续的三次样条曲线在光顺时使一些数据点程度不同的偏离原始位置,有时会出现超出规定的误差<sup>[20]</sup>。LIU Jiyuan<sup>[21]</sup>采用调整权因子的方式来改变局部曲线形状,但在空间复杂螺旋曲线插值拟合过程中误差较大点处调整的效果不明显,并且权因子的调整要通过计算拟合曲线与原始数据点的最短距离,计算量庞大,且权因子的调节规律性不强。全局插值法虽然使拟合后的曲线尽可能穿过原始数据点,但仍有部分拟合误差较大。由于全局逼近或其他方法拟合后的曲线穿过原始数据点的数量不如全局插值拟合方法多,但全局插值在部分点的拟合误差较大无法达到工况要求的拟合精度。由于 NURBS 曲线的局部可调性,笔者提出一种基于非均匀有理 B 样条拟合的空间螺旋刀具路径整体插值逼近方法,通过插入虚拟数据点,并计算插入数据点后的曲线拟合误差,拟合后的曲线仅用一个公式对空间复杂螺旋轨迹进行表达,为优化刀具的进给速度或刀轴矢量提供数学表达式,拟合误差能达到精加工的要求、误差变化幅度明显减小情况下,计算量较小。

# 1 空间螺旋刀具路径的三次 NURBS 曲线拟合

## 1.1 NURBS 曲线表示与节点计算

三维空间的 NURBS 曲线定义为对于给

定的控制点  $d_i = [x_i \ y_i \ z_i]$  及其权因子  $\omega_i (i=0,1,\cdots,n)$ , 其带权控制点  $D_i = [\omega_i d_i \ \omega_i] = [\omega_i x_i \ \omega_i y_i \ \omega_i z_i \ \omega_i]$ , 定义一条四维的  $k$  次非有理 B 样条曲线  $P(u)$ , 取它在第四坐标  $\omega = 1$  的超平面上的中心投影, 能够得到三维空间的一条  $k$  次 NURBS 曲线  $p(u)$ 。步骤如下:

(1) 确定所给控制顶点  $d_i = [x_i \ y_i \ z_i]$  的带权控制点  $D_i = [\omega_i d_i \ \omega_i] = [\omega_i x_i \ \omega_i y_i \ \omega_i z_i \ \omega_i]$ 。

(2) 定义一条四维  $k$  次非有理 B 样条曲线。

$$P(u) = \sum_{i=0}^n D_i N_{i,k}(u) \quad (1)$$

(3) 将其投影到  $\omega = 1$  超平面上并获得一条  $k$  次 NURBS 曲线  $p(u)$ 。

$$p(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i d_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(u)}, 0 \leq u \leq 1 \quad (2)$$

其中,  $N_{i,k}(u)$  为由节点矢量。

$U = [u_0, u_1, \cdots, u_{n+k}, u_{n+k+1}]$ , 为按 de Boor-Cox 递推公式决定的  $k$  次规范 B 样条基函数。

当  $k=0$  时,

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1}; \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

当  $k \in [1, +\infty)$  时,

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \quad (4)$$

通过对型值点的参数化得到节点矢量。NURBS 曲线一般采用弦长参数化法效果较好, 其中福利参数化法下生成的插值曲线显现出最好的光顺性, 拟合误差较小。其计算公式为

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_i = u_{i-1} + k_i |\Delta_{q_{i-1}}|, i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $k_i = 1 + \frac{3}{2} \left[ \frac{|\Delta_{q_{i-2}}| \theta_{i-1}}{|\Delta_{q_{i-2}}| + |\Delta_{q_{i-1}}|} + \frac{|\Delta_{q_i}| \theta_i}{|\Delta_{q_{i-1}}| + |\Delta_{q_i}|} \right], \theta_i = \min(\pi - \angle q_{i-1} q_i q_{i+1}, \frac{\pi}{2})$ ,  $|\Delta_{q_{-1}}| = |\Delta_{q_n}| = 0, \Delta_{q_i} = q_{i+1} - q_i$ 。

规范化使节点矢量在  $[0, 1]$  内, 进而得到  $(u_0 = \cdots = u_k = 0, u_{k+1}, \cdots, u_{n+k} = \cdots = u_{n+2k} = 1)$  节点矢量。

1.2 边界条件定义

由于节点矢量中存在重复的节点<sup>[19]</sup>, 会导致首(末)顶点和首(末)数据点重合, 首末端点处的条件不足。因此, 需要增加由边界条件确定的附加方程求出带权控制顶点  $D_i$ , 然后将带权控制顶点在  $\omega = 1$  的超平面上进行投影, 得到待求控制顶点  $d_i$ 。当  $\omega_i (i=0,1,\cdots,n)$  都为 1 时, 非均匀有理 B 样条曲线就转化为非均匀 B 样条曲线。因此只要定义非均匀 B 样条的边界条件亦可求出非均匀有理 B 样条曲线的边界条件方程。采用连续的  $C^2$  三次 NURBS 曲线对空间螺旋曲线进行拟合, 要求曲率均匀变化, 首末端点采用抛物线条件, 有二阶导且为实数。

首端点抛物条件:

$$\begin{cases} b_1 = 1 - \frac{\Delta_3 \Delta_4}{(\Delta_3 + \Delta_4)^2}, \\ c_1 = \frac{\Delta_3}{\Delta_3 + \Delta_4} \left( \frac{\Delta_4}{\Delta_3 + \Delta_4} - \frac{\Delta_3}{\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5} \right), \\ a_1 = \frac{(\Delta_3)^2}{(\Delta_3 + \Delta_4) + (\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5)}, \\ e_1 = \frac{1}{3} (q_0 + 2q_1). \end{cases} \quad (6)$$

末端点抛物条件:

$$\begin{cases} c_{n+1} = -\frac{(\Delta_{n+1})^2}{(\Delta_{n+1} + \Delta_n) + (\Delta_{n-1} + \Delta_n + \Delta_{n+1})}, \\ a_{n+1} = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_{n+1} + \Delta_n} \left( \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_{n-1} + \Delta_{n+1} + \Delta_n} - \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1} + \Delta_n} \right), \\ b_{n+1} = \frac{\Delta_{n+1} \Delta_n}{(\Delta_n + \Delta_{n+1})^2} - 1, \\ e_{n+1} = -\frac{1}{3} (q_{n-1} + 2q_{n-2}). \end{cases} \quad (7)$$

1.3 控制顶点求解

通过式(1)对3次非有理B样条曲线的定义,可知当 $\omega_i$ 都为1时,NURBS曲线即为3次非均匀B样条曲线。

根据反算 $C^2$ 连续的三次B样条插值曲线的控制顶点矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & a_n & b_n & c_n \\ c_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中, $a_i = \frac{(\Delta_{i+2})^2}{\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}}, b_i = \frac{\Delta_{i+2}(\Delta_i + \Delta_{i+1})}{\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}} + \frac{\Delta_{i+1}(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})}{\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3}}, c_i = \frac{(\Delta_{i+1})^2}{\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3}}, e_i = (\Delta_i + \Delta_{i+2})q_{i-1}, i=2, \cdots, n。$

曲线首端点与第一个型值点重合,末端点与最后一个型值点重合 $q_0 = d_0, q_n = d_{n+2}。$ 矩阵方程(8)中首行的元素 $b_1、c_1、a_1$ 与 $e_1$ 表示首端点边界条件。末行的 $b_{n+1}、c_{n+1}、a_{n+1}$ 与 $e_{n+1}$ 表示末端点边界条件。

采用追赶法解方程(8),求出全部控制顶点 $d_i$ ,对于非均匀有理B样条,只需将方程(8)中的 $d_i$ 改成带权的控制顶点 $D_i = [\omega_i d_i \ \omega_i]$ ,再投影到 $\omega = 1$ 超平面上,即用 $\omega_i d_i$ 除以 $\omega_i$ 就得到控制顶点 $d_i$ 。

1.4 拟合误差计算

原数据点到空间曲线的最短距离为曲线拟合误差,通过设定允许误差界 $\varepsilon$ ,若得到的拟合曲线最大误差在允许的误差界 $\varepsilon$ 内,则可作为最终曲线使用。求解曲线的最大拟合误差,一般通过曲线 $p(u)$ 到型值点 $q_i$ 的距离,取得 $q_i$ 到曲线点最短距离。豪斯多夫距离是曲线拟合偏差检查通常检查最大范数距离,其公式:

$$\max_{0 \leq i \leq n} (\min_{0 \leq u \leq 1} (|q_i - p(u)|)) \quad (9)$$

其中, $q_i$ 为原始型值点; $p(u)$ 为拟合得到的曲线上的点。实际拟合过程中,型值点 $q_i$ 到拟合曲线 $p(u)$ 的最短距离可通过二分法快

速得到一个允许误差范围的近似解。

2 插值逼近拟合方法的求解

2.1 拟合方法的求解流程

笔者综合运用插值、逼近算法实现曲线拟合算式的求解,插值逼近拟合方法的算法流程如图1所示。通过导入数据点即原始数据点,选择曲线曲率变化较大处的特征点 $q_m$ 。确定特征的位置点 $q_m$ 和要插入的虚拟数据点的数量和位置。插入虚拟数据点后,对所有点进行NURBS全局插值,对 $u$ 在区间 $[m+2-r, m+4+r]$ 的曲线采用式(9)进行拟合误差计算,采用二分法计算。当计算得到的拟合误差大于指定误差时,停止对剩余曲线误差的计算,进入下一步增加虚拟数据点的插入数量。

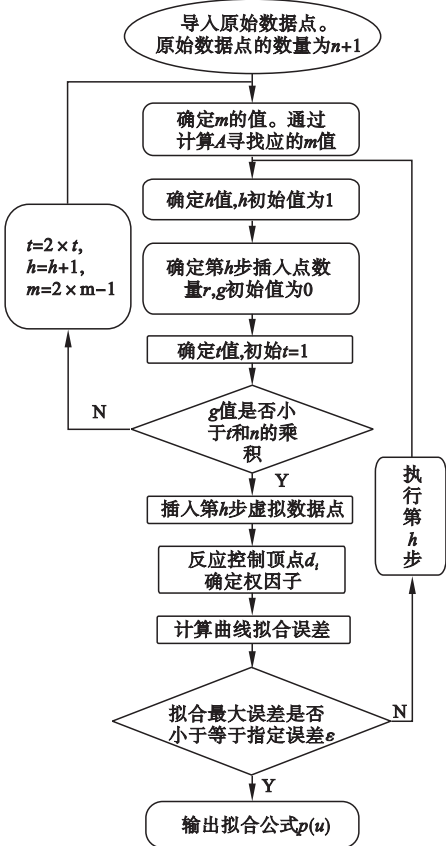


图1 插值逼近方法求解流程

Fig. 1 The flow of interpolation approximation  
插入虚拟数据点后,再对所有点进行

NURBS 全局插值,对  $u$  在区间(其中  $r$  为特征点两侧各选取的原始型值点数量),曲线采用式(8)进行拟合误差计算,采用二分法或牛顿迭代法计算。当计算得到的拟合误差大于指定误差时,停止对剩余曲线误差的计算,继续增加虚拟数据点的插入数量  $g$ 。然后重复计算过程,直至计算得到的拟合误差全者小于指定误差为止。

2.2 寻找特征点

在复杂曲面刀具路径生成过程中,常采用导入原始型值点,同时考虑曲线的挠率和曲率。为避免计算时受空间维度限制,曲线可看成由连续原始数据点  $q_i$ 、 $q_{i-1}$ 、 $q_{i+1}$  所在平面上的弧线组成,根据圆弧估算法求离散曲率  $\kappa_i$  的公式<sup>[16]</sup>:

$$\kappa_i = \frac{2\sin(\angle q_{i-1}q_iq_{i+1})}{|q_{i-1}q_{i+1}|}.$$

(10)

其中,夹角  $\angle q_{i-1}q_iq_{i+1}$  的区间为  $[90^\circ, 180^\circ]$ ,  $|q_{i-1}q_{i+1}|$  为弧线的弦长。

正弦函数  $\sin(\angle q_{i-1}q_iq_{i+1})$  在  $[90^\circ, 180^\circ]$  内单调递减,为方便计算可视为与夹角角度  $\angle q_{i-1}q_iq_{i+1}$  成反比。因此,结合式(10)可知曲率半径、夹角角度  $\angle q_{i-1}q_iq_{i+1}$  和弦长  $|q_{i-1}q_{i+1}|$  成正比。通过观察发现,在刀具路径弯曲程度改变较大时,弦长和夹角通常同时增大或减小。因此,在寻找特征点的过程中,仅需寻找夹角角度变化和弦长这两个自变量变化均较大的数据点即可,即计算弦长之差的变化量  $\|q_{i+1}q_{i+3}| - |q_iq_{i+2}||$  与夹角角度之差变化量  $|\angle q_{i+1}q_{i+2}q_{i+3} - \angle q_iq_{i+1}q_{i+2}|$  的乘积  $A_{m+1}$ 。

$$A_{m+1} = \|q_{i+1}q_{i+3}| - |q_iq_{i+2}|| \times |\angle q_{i+1}q_{i+2}q_{i+3} - \angle q_iq_{i+1}q_{i+2}|.$$

(11)

其中,  $|\angle q_{i+1}q_{i+2}q_{i+3} - \angle q_iq_{i+1}q_{i+2}|$  为  $q_i$ 、 $q_{i+2}$  小线段和  $q_{i+1}$ 、 $q_{i+3}$  小线段的夹角与  $q_i$ 、 $q_{i+1}$  小线段和  $q_{i+1}$ 、 $q_{i+1}$  小线段夹角之差的绝对值,单位为 rad;  $\|q_{i+1}q_{i+3}| - |q_iq_{i+2}||$  为弦长之差的绝对值, mm;  $m$  的取值为 1, 2,  $\dots$ ,  $n-2$ ;  $|q_{i+1}q_{i+3}|$  为  $q_{i+3}$  到  $q_{i+1}$  弧线的弦

长;  $|q_iq_{i+2}|$  为  $q_{i+2}$  到  $q_i$  弧线的弦长;乘积  $A$  可看成以两个夹角角度之差为弧度并且以弦长之差为半径的弧长,其单位为 mm。可根据乘积  $A$  简单判断曲线曲率半径变化大小,  $A$  越大,曲线弯曲程度变化越大,进而导致曲线拟合误差越大。计算  $A$  的平均值,将  $A$  中大于平均值所对应的  $m$  值找出,如图 2 所示,其中  $m$  为初始数据点序列号。

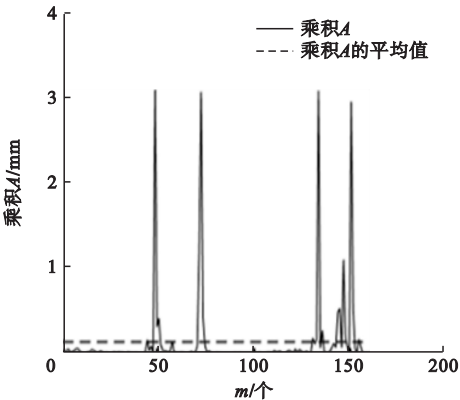


图2 A 与 m 值的关系图

Fig. 2 The relationship between A and m

2.3 虚拟数据点插入

将虚拟型值点添加在相邻两个原始型值点之间的直线上,在特征点  $q_m$  两侧各选取原始型值点数为  $r$ 。在特征点  $q_m$  前后先各加 0 个虚拟型值点。通过计算分析当特征点两侧所选择的原始型值点的数量小于等于 3 时,插入虚拟型值点的位置在相邻两原始型值点线段上,距离前一点的 5/8 处拟合误差较小,如图 3 中  $q_{m-1}$  与  $q_m$  之间线段上距离  $q_m$  点 5/8 处的点 J。当添加虚拟型值点前后各添加点数大于 3 时,根据计算在相邻两原始型值点线段中点位置添加虚拟数据点,拟合后的最大误差相较其他位置最小。

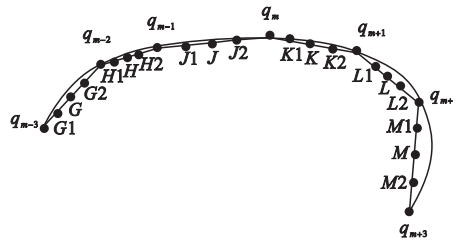


图3 虚拟数据点添加位置

Fig. 3 The add location for virtual data point



若拟合误差小于指定误差,则确定 NURBS 曲线公式符合工况要求。若大于指定误差,则将添加型值点的个数前后各增加 1,在原始型值点  $q_m$  前后先各插入 1 个虚拟型值点,图 3 中  $J$  点和  $K$  点。若大于指定误差,插入图 3 中的  $H、L$  点。本次添加的虚拟型值点位置在图 3 中的  $H、J、K、L$  点,拟合后计算与原始型值点的最短距离中的最大值与指定误差比较,若大于指定误差则继续增加型值点个数,即图 3 中的  $G、H、J、K、L、M$ 。当添加虚拟型值点前后各添加点数大于 3 时,根据计算在相邻两点线段中点位置添加型值点,拟合后的最大误差相较其他位置最小。因此,当添加虚拟型值点前后各添加点数大于 3 时,添加型值点的位置变为相邻两点线段中点位置。通过不断添加虚拟型值点,并计算相应的拟合误差。以上为插入虚拟型值点总数  $g$  小于  $n$  时的情况。

当曲线最大拟合误差大于指定误差  $\varepsilon$  且插入虚拟型值点总数  $g$  等于  $n \times t$  时,  $h$  值增加 1,当本次拟合误差大于指定误差时,执行步数为  $h + 1$  步,重复上述过程,并以此类推。

2.4 拟合误差计算

根据式(9)得到拟合误差计算公式:

$$\max_{0 \leq i \leq n} (\min_{m+2-r \leq u \leq m+4+r} |q_i - p(u)|) \leq \varepsilon. \quad (12)$$

其中,  $\varepsilon$  为指定误差。通过二分法或牛顿迭代法快速计算插入虚拟型值点部分的曲线  $u$  的范围为  $[m + 2 - r, m + 4 + r]$  上的拟合点与原始型值点之间的最短直线距离得到一个允许误差范围的近似解,  $m$  按从小到大的顺序取,只要有一个  $m$  所在区间的拟合误差值大于指定误差  $C^2$  就停止拟合误差的计算,进入下一步。若区间上所有曲线最大拟合误差小于或等于指定误差  $\varepsilon$ ,则得到所求 NURBS 曲线公式。

3 局部逼近拟合方法算法算例

3.1 插值逼近方法算例

算例采用如图 4 所示的叶片模型,其工

件坐标系下刀具路径的刀位点为笔者算例的数据点。叶轮毛坯直径为 100 mm,选用球头铣刀,采用叶片精加工驱动方法,切削模式选用螺旋铣削模式。行距参数采用等高残留法并设置 0.2 mm 的残留高度,设置加工时内外公差均为 0.02 mm,通过 UG 软件实现刀具路径的初步规划如图 4 所示。

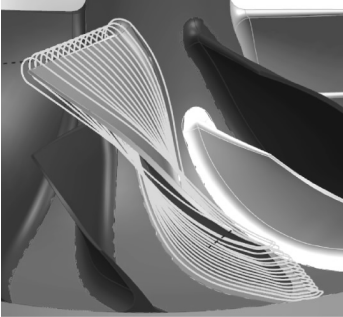


图 4 刀具路径

Fig. 4 The tool path

将工件坐标系下的刀具路径导出,文件格式为 CLS。刀具路径文件数据中,前三列为刀位点数据,分别对应工件坐标系  $X、Y、Z$  轴。算例生成的刀具路径共 2 637 个数据点。精加工叶轮叶片允许误差设为 0.02 mm,拟合误差为加工误差的 1/5 时对叶轮叶片加工影响较小,故算例设定 NURBS 拟合最大误差为 4  $\mu\text{m}$ 。

导入数据点,通过式(11)计算乘积  $A$  值,  $m$  为刀具路径文件中的刀位点序列号。  $A$  与  $m$  关系如图 5 所示。计算乘积  $A$  的平

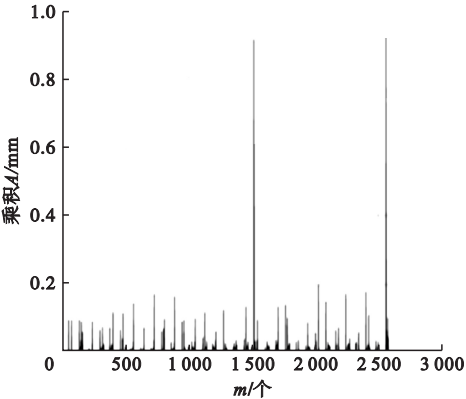


图 5 算例中  $A$  与  $m$  值的关系图

Fig. 5 The relationship between  $A$  and  $m$

均值,并找出大于乘积  $A$  平均值的对应点分别第  $m$  个。

超过  $A$  平均值所对应的  $m$  值有 343 个。按局部逼近拟合方法步骤在  $q_m$  前后各插入 0 个虚拟型值点,此时为全局插值拟合,此时计算通过式(9)计算曲线拟合误差,可得到最大拟合误差为 0.025 0 mm,拟合误差大于 4  $\mu\text{m}$ ,则根据插值逼近法流程添加插入虚拟型值点的个数并根据式(11)计算相应曲线段的拟合误差。当  $r$  为 3 时得到刀具路径曲线拟合误差,如图 6 所示。

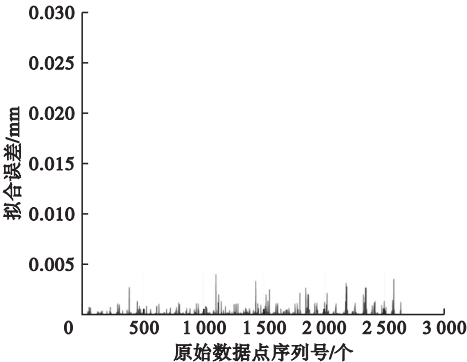


图 6 插值逼近法拟合误差

Fig. 6 The fitting error of interpolation approximation

3.2 两种方法拟合误差参数对比

通过全局插值方法拟合曲线,并采用式(9)计算得到 2 637 个数据点拟合后误差,全局插值方法拟合误差如图 7 所示。

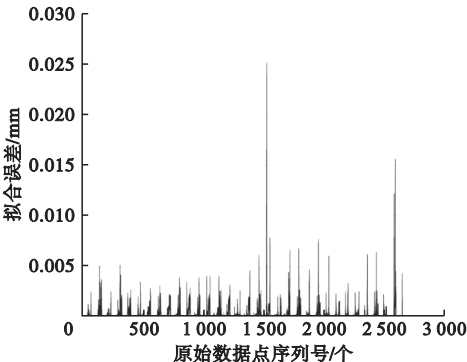


图 7 全局插值拟合方法拟合误差

Fig. 7 The fitting error of global interpolation fitting method

将插值逼近的拟合误差结果如图 6 所示,对比两种拟合方法的最大误差、控制顶点以及方差(见表 1)。

表 1 两种方法拟合 2 637 个数据点后曲线参数对比

Table 1 Comparison of curve parameters after fitting 2 637 data points by two methods			
方法	最大误差/mm	控制顶点数/个	方差/ $10^{-8}$
全局插值法	0.025 0	2 639	105.17
插值逼近法	0.003 98	3 609	5.322 3

对两种方法拟合后的误差、控制顶点数以及方差进行比较,在提供数据点相同的情况下,笔者方法的最大误差和方差远小于全局插值方法。当要求最大拟合误差达到 4  $\mu\text{m}$ 以下时,采用最小二乘法在拟合时需要重复计算整段曲线的拟合误差,而笔者方法仅需重复计算部分曲线段的拟合误差,且需要计算拟合误差的曲线段长度小于整体曲线段的 36.7%,并且拟合得到的曲线穿过大部分的型值点,在  $C^2$  参数连续的情况下,能够更准确的表达刀具路径的特点。

4 结 论

(1)采用笔者方法对空间复杂螺旋曲线拟合,得到了拟合轨迹既符合  $C^2$  连续的三次 NURBS 曲线光顺的条件,最大拟合误差也达到了精密加工的工况要求,并且仅用一个公式表达出空间螺旋刀具路径。

(2)三次 NURBS 曲线连续性好,拟合后曲线最大拟合误差比采用原始全局插值方法拟合后的误差要低,且拟合误差的波动范围减小。

(3)与最小二乘法对比,笔者方法在计算拟合后曲线的拟合误差方面的计算量小,得出曲线穿过大部分的数据点,能够更准确地表达刀具路径的形状特点,在零件加工时保证刀具路径参数的准确性。

参考文献

[1] 兰利洁,崔正兴,张珂,等. 异型石材车铣加工中心立柱及导轨精度调试与分析[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2012, 28(2): 357-362.  
(LAN Lijie, CUI Zhengxing, ZHANG Ke, et al. Accuracy adjustment and analysis of column

- and guide rail of special stone turning and milling machining center [J]. Journal of Shenyang jianzhu university(natural science), 2012, 28(2): 357 – 362. )
- [2] FANGYUAN L, CHARLES F J, LEANNE K N. Interpreting aerodynamics of a transonic impeller from static pressure measurements [J]. International journal of rotating machinery, 2018, 2018: 1 – 9.
- [3] 秦纪云. 曲率急变曲率急变曲面五轴加工刀矢运动规划关键技术研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2018.  
(QIN Jiyun. Research on key technology of cutter vector motion planning for 5-axis machining of curved surface with abruptly changed curvature [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2018. )
- [4] 张风磊. 运动学特性约束下曲面高速进给数控加工轨迹规划[D]. 北京: 北京交通大学, 2017.  
(ZHANG Fenglei. Tool path planning in high feed speed surface NC machining with kinematics constraints [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2017. )
- [5] 陈思, 高雪霞, 丁国富, 等. NURBS 曲面插值参数化及其在数控加工中的应用[J]. 机械设计与制造, 2011(3): 52 – 54.  
(CHEN Si, GAO Xuexia, DING Guofu, et al. Parameters-interpolating of NURBS surface and application in the NC machining [J]. Machinery design & manufacture, 2011(3): 52 – 54. )
- [6] 杨智敏. 动力学特性约束下叶轮数控加工刀位轨迹规划[D]. 北京: 北京交通大学, 2014.  
(YANG Zhimin. Tool path planning with dynamical constraint for impeller NC machining [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2014. )
- [7] 詹华西. 五轴联动加工中心操作与基础编程[M]. 北京: 机械工业出版社, 2018.  
(ZHAN Huaxi. Operation and basic programming of five axis linkage machining center [M]. Beijing: China Machine Press, 2018. )
- [8] 吴继春. 曲面数控加工编程轨迹的 NURBS 拟合及插补算法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2012.  
(WU Jichun. Study on optimization of NC machining tool-path and interpolation algorithm [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2012. )
- [9] YAN Changya, LEE Chenhan, YANG Jianzhong. Three-axis tool-path B-spline fitting based on preprocessing, least square approximation and energy minimization and its quality evaluation [J]. MM science journal, 2012(4): 352 – 358.
- [10] DUAN Molong, OKWUDIRE C. Minimum-time cornering for CNC machines using an optimal control method with NURBS parameterization [J]. International journal of advanced manufacturing technology, 2016, 85(5 – 8): 1405 – 1418.
- [11] WANG Qiao, ZHOU Wei, CHENG Yonggang, et al. NE-IIBEFM for problems with body forces: a seamless integration of the boundary type meshfree method and the NURBS boundary in CAD [J]. Advances in engineering software, 2018, 118: 1 – 17.
- [12] KADAPA C, DETTMER W G, PERIC D. NURBS based least-squares finite element methods for fluid and solid mechanics [J]. International journal for numerical methods in engineering, 2015, 101(7): 521 – 539.
- [13] 赵鹏, 楼佩煌, 刘明灯, 等. 基于 NURBS 曲线拟合的刀具路径优化方法[J]. 计算机集成制造系统, 2011(7): 112 – 117.  
(ZHAO Peng, LOU Peihuang, LIU Mingdeng, et al. Tool path optimization method based on NURBS curve fitting [J]. Computer integrated manufacturing system, 2011, 17(8): 1454 – 1459. )
- [14] 刘莲, 冯仁忠. 遗传算法求解 B 样条曲线最小二乘拟合问题[J]. 应用数学进展, 2014, 3(4): 160 – 168.  
(LIU Lian, FENG Renzhong. Least squares fitting with B-spline by genetic algorithm [J]. Advances in applied mathematics, 2014, 3(4): 160 – 168. )
- [15] 彭丽. 粒子群算法在曲线拟合中的应用[J]. 软件导刊, 2011, 10(2): 55 – 56.  
(PENG Li. Application of particle swarm optimization in curve fitting [J]. Software guide, 2011, 10(2): 55 – 56. )
- [16] 袁佑鹏. 自适应的 NURBS 曲线拟合及其速度规划算法研究[D]. 济南: 山东大学, 2019.  
(YUAN Jipeng. Research on adaptive NURBS curve fitting and its feedrate scheduling algorithm [D]. Ji'nan: Shandong University, 2019. )
- [17] 杨萍, 杨明泰, 张阳阳. 高速数控加工中 NURBS 曲线拟合及插补技术的研究[J]. 中国机械工程, 2015, 26(12): 1630 – 1634.  
(YANG Ping, YANG Mingtai, ZHANG Yangyang. Research on technologies of NURBS curve fitting and interpolation in high speed NC machining [J]. China mechanical engineering, 2015, 26(12): 1630 – 1634. )
- [18] TULSYAN S, ALTINTAS Y. Local toolpath smoothing for five-axis machine tools [J]. International journal of machine tools & manufacture, 2015, 96: 15 – 26.
- [19] SHEN Liyong, YUAN Chunming, GAO Xiaoshan. Certified approximation of parametric space curves with cubic B-spline curves [J]. Computer aided geometric design, 2012, 29(8): 648 – 663.
- [20] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.  
(SHI Fazhong. In construction computer aided geometric design and non-uniform rational B-spline [M]. Beijing: Higher Education Press, 2013. )
- [21] LIU Jiyuan, CHEN Shaoping. Research on convexity-preserving of the weight factor of cubic NURBS interpolation curve [C]// Proceeding of the 2015 4th national conference on electrical, electronics and computer engineering. Paris: Atlantis Press, 2016: 969 – 975.  
(责任编辑: 刘春光 英文审校: 范丽婷)