

# 组合载荷作用下 Ludwick 型材料悬臂柱 后屈曲载荷优化算法

侯祥林<sup>1</sup>, 成永刚<sup>1</sup>, 赵晓旭<sup>1</sup>, 张啸尘<sup>1</sup>, 殷晓薇<sup>2</sup>

(1. 沈阳建筑大学机械工程学院, 辽宁 沈阳 110168; 2. 中车长春轨道客车股份有限公司, 吉林 长春 130062)

**摘要** 目的 针对组合载荷作用下的 Ludwick 型材料悬臂柱, 提出不同端部角度下后屈曲载荷的优化算法。方法 由 Ludwick 本构关系推导弯矩-曲率之间的表达式, 以曲率半径表示子段在局部坐标系中的位置; 根据局部坐标系与整体坐标系之间的变换式, 得出整体坐标系下子段两端点的坐标关系, 并通过迭代实现悬臂柱两端点坐标之间的联系; 以无量纲后屈曲载荷为设计变量, 固支端转角形成目标函数, 建立用于求解后屈曲载荷的优化算法, 并对比两种不同载荷作用下的无量纲后屈曲载荷以及水平位移和垂直位移。结果 随着端部角度的增大, 悬臂梁自由端处水平位移减小, 垂直位移增大; 两种不同载荷作用下无量纲后屈曲载荷均表现为: 当端部转角从  $10^\circ$  增加到  $40^\circ$  时, 无量纲后屈曲载荷减小; 当端部转角从  $40^\circ$  增加到  $90^\circ$  时, 无量纲后屈曲载荷增大。结论 相较于数值方法, 该优化算法的优势在于计算不同端部角度下后屈曲载荷、水平位移及垂直位移时更加直接快速; 硬化指数是决定后屈曲平衡路径是否稳定的关键因素, 笔者取硬化指数为  $1/0.9$ ; 单一载荷或组合载荷作用下 Ludwick 型材料悬臂柱的后屈曲平衡路径均为不稳定的。

**关键词** 后屈曲; Ludwick 型材料; 非线性; 悬臂柱; 优化算法

中图分类号 TU311.2; O342

文献标志码 A

## Optimization Algorithm of Post-Buckling Load for Cantilever Columns with Ludwick Type Material under a Combined Load

HOU Xianglin<sup>1</sup>, CHENG Yonggang<sup>1</sup>, ZHAO Xiaoxu<sup>1</sup>, ZHANG Xiaochen<sup>1</sup>, YIN Xiaowei<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang, China, 110168; 2. CRRC Changchun Railway Vehicles Co. Ltd., Changchun, China, 130062)

**Abstract:** The purpose of this paper is to propose the optimization algorithm of buckling load under different end angles for Ludwick cantilever columns by a combined load. The expression

收稿日期: 2021-09-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(52005352); 辽宁省教育厅高等学校基本科研项目(LJKZ0572)

作者简介: 侯祥林(1962—), 男, 教授, 博士, 主要从事工程力学、非线性振动等方面研究。

between bending moment and curvature is derived from Ludwick constitutive relationship, and the position of the sub segment in the local coordinate system is expressed by the radius of curvature. According to the transformation between the local coordinate system and the global coordinate system, the coordinate relationship between the two endpoints of the sub segment in the global coordinate system is obtained, and the association between the two endpoints coordinates of the cantilever column is realized through iteration. The dimensionless buckling load as the design variable and the fixed end angle as the objective function, the optimization algorithm for solving the buckling load is established, and the dimensionless buckling load, horizontal displacement and vertical displacement under two different loads are compared. The results show that with the increase of the end rotation angle, the horizontal displacement at the free end of the cantilever beam decreases and the vertical displacement increases. The non-dimensional buckling loads decrease when the corner angle increases from  $10^\circ$  to  $40^\circ$ , but increase when the corner angle increases from  $40^\circ$  to  $90^\circ$ . Compared with the numerical method, this optimization algorithm is more direct and fast in calculating the buckling load, horizontal displacement and vertical displacement at different end angles. It is concluded that the hardening index is a key factor to determine whether the post-buckling equilibrium path is stable. The hardening index in this paper is  $1/0.9$ , the post-buckling equilibrium path is unstable for Ludwick material cantilever columns subjected to a single or a combined load.

**Key words:** post-buckling; Ludwick type material; nonlinearity; cantilever columns; optimization algorithm

非线性材料在工程上的应用越来越广泛,近年来进行了大量对材料力学性能参数测定的试验。非线性材料的本构关系是在胡克定律的基础上表现出不同形式的应力-应变特性,K. Singh<sup>[1]</sup>和 G. Samuel等<sup>[2]</sup>介绍了几种常见的非线性本构关系。G. Lewis等<sup>[3]</sup>对两种 Ludwick 型材料的大变形进行了研究,推导出悬臂梁在自由一端受横向集中载荷发生大变形时的控制方程。无量纲横向集中载荷的形式参照了 S. P. Timoshenko等<sup>[4]</sup>对线性材料悬臂梁大挠度计算时所采用的横向集中力的无量纲化,不同之处在于非线性材料横向集中力的无量纲形式更加复杂。计算组合载荷作用下 Ludwick 型材料悬臂梁大挠度的控制方程由 K. Lee<sup>[5]</sup>提出,并以积分的形式给出了悬臂梁上任意点处弯矩的表达式。在不施加均布载荷的情况下,与 G. Lewis等<sup>[3]</sup>的结果进行了对比,得到的结果几乎一致。L. Chen<sup>[6]</sup>得出了直角坐标系中悬臂梁大变形的计算公式,并将均布载荷所产生的弯矩进行了离散化,有利于编写程

序。I. Eren<sup>[7]</sup>利用直角坐标系中的曲率表达式计算了不同弧长下无量纲的水平 and 垂直挠度值,但直角坐标系中曲率公式不含参数  $\theta$ ,因此无法得到端部转角。A. Borboni等<sup>[8]</sup>讨论了悬臂梁在自由一端水平力、竖向力和弯矩共同作用下的大挠度问题,并给出了数值算法和算例。H. Liu等<sup>[9]</sup>提出了用打靶法求解挠度曲线二阶微分方程的方法,并绘制了大挠度下悬臂梁和简支梁的变形曲线。

线性材料后屈曲问题由 S. P. Timoshenko等<sup>[10]</sup>提出,利用椭圆积分得到屈曲载荷的求解公式。Ludwick 型本构关系的表达式有一个缺点,当应变为零时,应力梯度会趋于无穷大。H. Jung等<sup>[11]</sup>给出了不同载荷组合作用下悬臂柱变形和后屈曲的弯矩表达式,针对其中一种组合载荷情况进行分析,建立了微分控制方程,得到了不同端部角度所对应的无量纲屈曲载荷及水平位移和垂直位移。针对 Ludwick 型本构关系和含修正项的 Ludwick 型本构关系,M. Brojan等<sup>[12]</sup>得出了受不同约束的弹性柱屈曲载荷的计算

公式。J. K. Lee 等<sup>[13]</sup>对 Ludwick 型材料正多边形截面的广义面积二阶矩 (GSMA) 及其在悬臂柱屈曲问题中的应用进行了研究。侯祥林等<sup>[14-15]</sup>提出了变截面刚架临界载荷的优化算法,并对截面变化的简支梁后屈曲载荷进行了计算<sup>[16]</sup>。

基于上述分析,笔者针对满足 Ludwick 型本构关系的非线性材料,通过局部坐标系与整体坐标系之间的变换式,得出整体坐标系下子段两端点的坐标关系;再利用 VB 编程软件实现了悬臂柱两端点坐标之间的联系,并以无量纲屈曲载荷为设计变量,以固定一端转角形成目标函数,建立用于求解屈曲载荷的优化算法;最后将算法结果与文献[11]中数值结果进行对比分析,验证了笔者所提优化算法的合理性和精确性,可知硬化指数是影响后屈曲平衡路径是否稳定的决定性因素。

1 理论分析

1.1 应力-应变特性

Ludwick 型材料的应力应变特性服从幂律关系,其本构模型可表述为

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon^{1/n}, & \varepsilon \geq 0, \\ -E(-\varepsilon)^{1/n}, & \varepsilon < 0. \end{cases} \tag{1}$$

式中:  $\sigma$  为应力;  $\varepsilon$  为应变;  $E$  为弹性模量;  $n$  为硬化指数,是由材料决定的常数。

1.2 弯矩-曲率关系

组合载荷作用下悬臂柱的后屈曲平衡状态如图 1 所示。在载荷作用下悬臂柱由自由一端由  $O'$  点偏转到  $O''$  点。

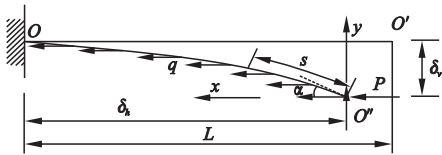


图 1 悬臂柱后屈曲平衡状态

Fig. 1 Post-buckling equilibrium state of a cantilever column

为了便于结果对比,以  $O''$  为坐标原点建

立直角坐标系  $xO''y$ 。图 1 中,  $P$  为屈曲载荷,  $q$  为均布载荷,  $L$  为悬臂柱的长度,  $\delta_h$  和  $\delta_v$  分别表示  $O$  点的水平位移和垂直位移,  $\alpha$  为  $O''$  点切线方向与  $x$  轴正方向的夹角,简称端部角度。

悬臂柱上任一点处横截面上的弯矩可表示为

$$M = - \int_A \sigma y dA. \tag{2}$$

通过几何图形导出的应变与曲率的关系式:

$$\varepsilon = yk. \tag{3}$$

以矩形截面悬臂柱为例,将式(1)和式(3)分别代入到式(2)中:

$$M = E \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \frac{n}{2n+1} h^{\frac{2n+1}{n}} b / (\operatorname{sgn}(k) \times k)^{1/n}. \tag{4}$$

式中:  $\operatorname{sgn}(k)$  表示符号函数,当  $k < 0$  时,返回  $\operatorname{sgn}(k) = -1$ 。

令

$$I_n = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \frac{n}{2n+1} h^{\frac{2n+1}{n}} b. \tag{5}$$

则式(4)可简化为

$$M = EI_n / (\operatorname{sgn}(k) \times k)^{1/n}. \tag{6}$$

式(6)为矩形截面 Ludwick 型材料悬臂柱弯矩-曲率的关系式。整理得:

$$\rho = - \frac{E^n I_n^n}{M^n}. \tag{7}$$

式中:  $\rho$  为曲率  $k$  所对应的曲率半径。悬臂柱上  $s$  点处的弯矩由两部分组成,一部分为屈曲载荷对  $s$  点产生的弯矩,另一部分为均布载荷对  $s$  点产生的弯矩:

$$M = Py + M_q. \tag{8}$$

将式(8)中均布载荷产生的弯矩改写成:

$$M_q = \sum_{j=1}^{i-2} q(s_j - s_{j-1}) \left[ \frac{y_{i-1} + y_i}{2} + (y_{i-1} - \frac{y_{j-1} + y_j}{2}) \right]. \tag{9}$$

将离散形式的弯矩代入到式(8)中,则  $i$

点处的曲率半径为

ρ<sub>i</sub> = - \frac{E^n I\_n^n}{[Py\_{i-1} + M\_{q(i)}]^n} \tag{10}

1.3 任意子段坐标关系

从悬臂柱上截取无限小段AB,以A点为坐标原点建立局部坐标系x'Ay',如图2所示。θ<sub>i-1</sub>和θ<sub>i</sub>分别为A点和B点处的转角,Δθ<sub>i</sub>为B点相对于A点的转角,Δs<sub>i</sub>为Δθ<sub>i</sub>对应的弧长,Δx<sub>i</sub>和Δy<sub>i</sub>分别表示局部坐标系x'Ay'中B点的横坐标和纵坐标。

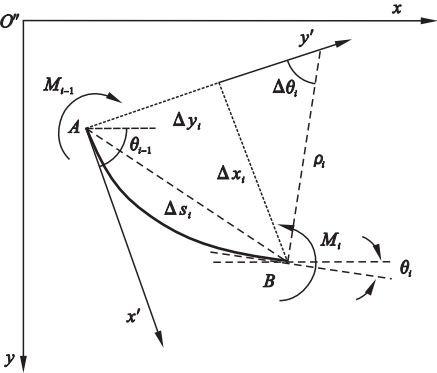


图2 任意子段两端点坐标

Fig. 2 Coordinates between two endpoints of any sub-segment

局部坐标系x'Ay'中,B点相对于A点的转角Δθ<sub>i</sub>以及B点的横坐标Δx<sub>i</sub>和纵坐标Δy<sub>i</sub>可由曲率半径建立关系式:

{ Δθ<sub>i</sub> = Δs<sub>i</sub>/ρ<sub>i</sub>,  
Δx<sub>i</sub> = ρ<sub>i</sub>sinΔθ<sub>i</sub>,  
Δy<sub>i</sub> = ρ<sub>i</sub>(1 - cosΔθ<sub>i</sub>). \tag{11}

A点在xO''y坐标系中的坐标为(x<sub>i-1</sub>, y<sub>i-1</sub>),根据局部坐标系与整体坐标系关系,B点在xO''y坐标系中的坐标(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)可用A点坐标(x<sub>i-1</sub>, y<sub>i-1</sub>)进行表示:

{ θ<sub>i</sub> = θ<sub>i-1</sub> + Δθ<sub>i</sub>,  
x<sub>i</sub> = x<sub>i-1</sub> + Δx<sub>i</sub>cosθ<sub>i-1</sub> - Δy<sub>i</sub>sinθ<sub>i-1</sub>,  
y<sub>i</sub> = y<sub>i-1</sub> + Δx<sub>i</sub>sinθ<sub>i-1</sub> + Δy<sub>i</sub>cosθ<sub>i-1</sub>. \tag{12}

2 求解屈曲载荷的优化算法

2.1 无量纲化

考虑q = 0以及q = P/L两种情况,式

(10)可进一步简化,对简化后的式(10)进行无量纲化:

\bar{\rho}\_i = - \frac{1}{\bar{P}^n [\bar{y}\_{i-1} + \sum\_{j=i}^N (\bar{s}\_j - \bar{s}\_{j-1}) \frac{\bar{y}\_{j-1} + \bar{y}\_j}{2}]^n} \tag{13}

其中, \bar{\rho}\_i = \frac{\rho\_i}{L}, \bar{P} = \frac{PL^{(n+1)/n}}{EI\_n}, \bar{s}\_j = \frac{s\_j}{L}, \bar{y}\_i = \frac{y\_i}{L}.

由于只考虑特殊情况,优化算法中只有无量纲屈曲载荷\bar{P}一个设计变量。悬臂柱上O点满足边界条件:

\theta\_N = \theta(\bar{s} = 1) = 0. \tag{14}

将用来形成目标函数。

2.2 优化模型

定义无量纲屈曲载荷\bar{P}为设计变量z,通过O点所满足的边界条件来形成目标函数f(z) = \theta\_N^2,这样悬臂柱后屈曲载荷的求解问题转化为求解优化模型minf(z)。

2.3 目标函数形成过程

将图1屈曲后的悬臂柱等分为N段,如图3所示。s<sub>i</sub>表示第i等分点距O''点的弧长,直角坐标为(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>); s<sub>N</sub>表示固支端距O''点的弧长,直角坐标为(x<sub>N</sub>, y<sub>N</sub>)。

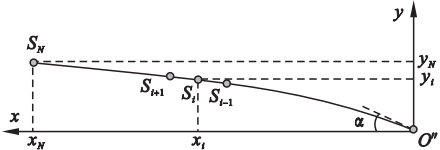


图3 悬臂柱等分为N段

Fig. 3 The cantilever column divided equally into N sections

对于悬臂柱而言,O点的转角θ<sub>N</sub>应该为0,所以每完成一轮计算都将θ<sub>N</sub>的值与0进行比较,由此形成了目标函数f(z) = θ<sub>N</sub><sup>2</sup>。直到目标函数的值达到预设的计算精度,运算结束。

3 算例分析

对端部角度α = 60°时组合载荷作用下Ludwick型材料悬臂柱屈曲载荷进行求解,将悬臂柱等分为1 000段,即N = 1 000。硬化指数n取1/0.9,无量纲屈曲载荷\bar{P}和目标函数

$f(x)$  经过 20 次优化得到结果如表 1 所示。

表 1 端部角度为  $60^\circ$  时屈曲载荷的优化计算过程  
Table 1 The optimization calculation process of the buckling load at an end angle of  $60^\circ$

优化次数	屈曲载荷 $\bar{P}$	目标函数值 $f(z)$
1	2.433 906	$1.909\ 212 \times 10^{-2}$
2	2.061 874	$2.035\ 815 \times 10^{-4}$
3	2.061 902	$2.032\ 420 \times 10^{-4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
18	2.095 126	$4.544\ 130 \times 10^{-14}$
19	2.095 126	$7.017\ 123 \times 10^{-16}$
20	2.095 126	$2.766\ 560 \times 10^{-16}$

为了验证笔者优化算法的合理性,与文献[11]在  $n = 1/0.9$  时得到的  $q = 0$  和  $q = P/L$  两种不同载荷作用下悬臂柱的屈曲载荷的数值结果进行对比,所采用的截面形状如图 4 所示。

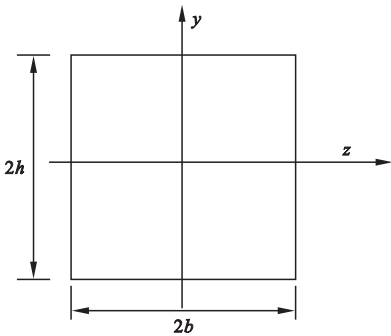


图 4 悬臂柱截面形状

Fig. 4 Section shape of a cantilever column

表 2  $q = 0$  时无量纲屈曲载荷算法结果和文献[11]对比

$\alpha/(^\circ)$	优化算法结果			文献[11]结果			相对误差/%		
	$\bar{P}$	$\delta_h/L$	$\delta_v/L$	$\bar{P}$	$\delta_h/L$	$\delta_v/L$	$\bar{P}$	$\delta_h/L$	$\delta_v/L$
10	2.870 181	0.992 187	0.112 625	2.698 755	0.992 294	0.111 698	6.352	-0.011	0.830
20	2.709 165	0.968 896	0.223 074	2.603 844	0.969 216	0.221 717	4.045	-0.033	0.612
30	2.652 547	0.930 574	0.329 214	2.573 366	0.931 162	0.327 593	3.077	-0.063	0.495
40	2.649 110	0.877 948	0.429 000	2.583 735	0.878 841	0.427 224	2.530	-0.102	0.416
50	2.685 102	0.812 014	0.520 513	2.627 906	0.813 232	0.518 677	2.176	-0.150	0.354
60	2.756 707	0.734 002	0.601 993	2.704 531	0.735 554	0.600 157	1.929	-0.211	0.306
70	2.864 687	0.645 348	0.671 877	2.815 470	0.647 233	0.670 120	1.748	-0.291	0.262
80	3.013 064	0.547 648	0.728 813	2.965 256	0.549 855	0.727 202	1.612	-0.401	0.222
90	3.209 181	0.442 612	0.771 680	3.161 469	0.445 122	0.770 274	1.509	-0.564	0.183

悬臂柱的截面尺寸为  $b = h = 1\text{ mm}$ , 长度为  $L = 100\text{ mm}$ 。由于使用不同方法对屈曲载荷  $\bar{P}$  进行无量纲化,分析发现文献[11]中无量纲屈曲载荷  $\bar{P}$  约是文中的 1.639 545 倍。具体计算式如下:

$$\lambda = \frac{I_{1/0.9} L^2}{I_0 L^{1.9}} = \frac{3 \times 100^{0.1}}{2.9} = 1.639\ 545.$$

(15)

其中,  $I_0 = 4bh^3/3$ ,  $I_{1/0.9}$  可通过式(5)进行计算。

根据  $q = 0$  和  $q = P/L$  两种不同情况,表 2 和表 3 分别给出了时无量纲屈曲载荷  $\bar{P}$  以及  $O$  点的无量纲水平位移  $\delta_h/L$  和垂直位移  $\delta_v/L$  算法值与数值结果的对比,其中文献[11]中无量纲屈曲载荷  $\bar{P}$  的值是在原来的基础上除以 1.639 545 得到的。

相对误差主要来源于文献[11]的数值结果是通过修正的 Ludwick 本构关系计算出来的,修正项  $\varepsilon_a = (2n)^{n/(1-n)}$  虽然很小,但对结果产生了一定影响;其次无量纲屈曲载荷  $\bar{P}$  的表达式不同,转化过程中产生误差;此外悬臂柱的等分点数目对结果有较大的影响,算例中是将悬臂柱等分为 1 000 小段,若取更多的等分点,计算精度也会相应的提高,但会降低计算速度。



表3  $q = P/L$  时无量纲屈曲载荷算法结果和文献[11]对比

Table 3 Comparison between the results of dimensionless buckling load algorithm and reference [11] when  $q = P/L$

$\alpha/(^{\circ})$	优化算法结果			文献[11]结果			相对误差/%		
	$\bar{P}$	$\delta_h/L$	$\delta_v/L$	$\bar{P}$	$\delta_h/L$	$\delta_v/L$	$\bar{P}$	$\delta_h/L$	$\delta_v/L$
10	2.191 461	0.991 830	0.115 928	2.065 744	0.991 949	0.114 908	6.086	-0.012	0.887
20	2.067 728	0.967 478	0.229 563	1.990 961	0.967 832	0.228 075	3.856	-0.037	0.653
30	2.023 212	0.927 413	0.338 659	1.965 740	0.928 065	0.336 885	2.924	-0.070	0.527
40	2.018 748	0.872 405	0.441 058	1.971 455	0.873 393	0.439 119	2.399	-0.113	0.441
50	2.043 740	0.803 504	0.534 736	2.002 482	0.804 850	0.532 730	2.060	-0.167	0.377
60	2.095 126	0.722 012	0.617 837	2.057 577	0.723 723	0.615 850	1.825	-0.236	0.323
70	2.173 278	0.629 448	0.688 708	2.137 929	0.631 521	0.686 816	1.653	-0.328	0.275
80	2.280 958	0.527 505	0.745 917	2.246 672	0.529 926	0.744 196	1.526	-0.457	0.231
90	2.423 321	0.418 005	0.788 275	2.389 151	0.420 750	0.786 789	1.430	-0.652	0.189

图5绘制了两种受力情况下无量纲屈曲载荷 $\bar{P}$ 的变化曲线,由图中曲线的变化趋势可以看出, $n = 1/0.9$ 时悬臂柱的后屈曲平衡路径并不稳定。

为了更直观地体现悬臂柱在两种不同受力情况下的变形,将表2和表3中无量纲水平位移 $\delta_h/L$ 和垂直位移 $\delta_v/L$ 转换到图1中以 $O$ 点为坐标原点的直角坐标系中,分别绘制了 $q = 0$ 和 $q = P/L$ 时不同端部角度下悬臂柱的变形曲线,如图6所示。

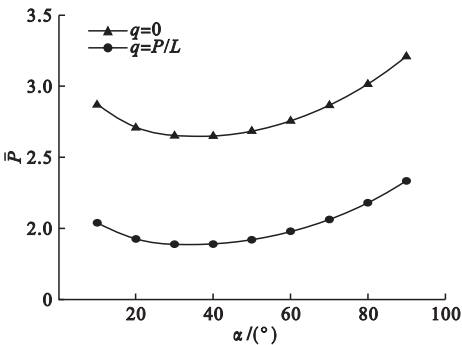


图5  $q = 0$  和  $q = P/L$  时不同端部角度下屈曲载荷的变化曲线  
Fig. 5 The variation curve of buckling load under different end angles when  $q = 0$  and  $q = P/L$

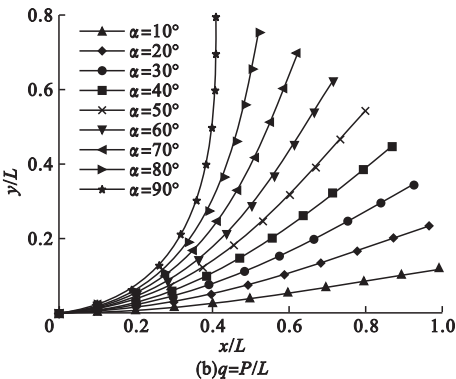
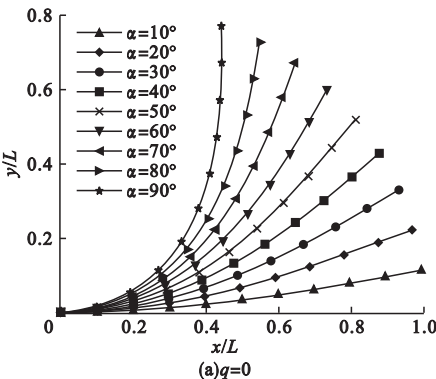


图6 不同端部角度下悬臂柱的变形曲线

Fig. 6 The deformation curve of cantilever column at different end angles

4 结 论

(1)通过对  $q = 0$  和  $q = P/L$  两种不同情况下无量纲屈曲载荷  $\bar{P}$ ,以及无量纲水平位

移 $\delta_h/L$ 和垂直位移 $\delta_v/L$ 算法值与数值结果的对比,验证了笔者所提出优化算法的合理性和精确性。

(2)绘制了  $q = 0$  和  $q = P/L$  两种不同情

况下不同端部角度时悬臂柱的变形曲线,通过对悬臂柱上 10 个点的坐标对比,发现当  $\alpha$  相等时,组合载荷作用下各点的横坐标小于单一载荷作用时各点的横坐标,而纵坐标则是前者大于后者。

(3) 端部角度  $\alpha$  由  $10^\circ$  增加到  $40^\circ$  时,屈曲载荷逐渐变小,而在  $40^\circ$  之后屈曲载荷逐渐增加,说明这种 Ludwick 型材料的后屈曲平衡路径并不稳定。

## 参考文献

- [1] SINGH K. Strain hardening behaviour of 316L austenitic stainless steel [J]. Materials science and technology, 2004, 20(9): 1134 – 1142.
- [2] SAMUEL G, RODRIGUEZ P. On power-law type relationships and the Ludwigson explanation for the stress-strain behaviour of AISI 316 stainless steel [J]. Journal of materials science, 2006, 40(21): 5727 – 5731.
- [3] LEWIS G, MONASA F. Large deflections of cantilever beams of nonlinear materials [J]. Computers & structures, 1981, 14 (5/6): 357 – 360.
- [4] TIMOSHENKO S P, GERE J M. Mechanics of materials [M]. New York: Van Nostrand reinhold company, 2002.
- [5] LEE K. Large deflections of cantilever beams of non-linear elastic material under a combined loading [J]. International journal of non-linear mechanics, 2002, 37(3): 439 – 443.
- [6] CHEN L. An integral approach for large deflection cantilever beams [J]. International journal of non-linear mechanics, 2010, 45(3): 301 – 305.
- [7] EREN I. Determining large deflections in rectangular combined loaded cantilever beams made of non-linear Ludwick type material by means of different arc length assumptions [J]. Sadhana, 2008, 33(1): 45 – 55.
- [8] BORBONI A, SANTIS D. Large deflection of a non-linear, elastic, asymmetric Ludwick cantilever beam subjected to horizontal force, vertical force and bending torque at the free end [J]. Meccanica, 2014, 49 (6): 1327 – 1336.
- [9] LIU H, HAN Y, YANG J. Large deflection of curved elastic beams made of Ludwick type material [J]. Applied mathematics and mechanics, 2017, 38(7): 909 – 920.
- [10] TIMOSHENKO S P, GERE J M. Theory of elastic stability [M]. New York: Dover publications inc, 1989.
- [11] JUNG H, KANG J. Large deflection analysis of fibers with nonlinear elastic properties [J]. Textile research journal, 2005, 75 (10): 715 – 723.
- [12] BROJAN M, PUKSIC A, KOSEL F. Buckling and post-buckling of a nonlinearly elastic column [J]. Journal of applied mathematics and mechanics, 2007, 87(7): 518 – 527.
- [13] LEE J K, LEE B K. Generalized second moment of areas of regular polygons for Ludwick type material and its application to cantilever column buckling [J]. International journal of structural stability and dynamics, 2019, 19(2): 1950010.
- [14] 侯祥林, 王似巍, 张睿之, 等. 一类薄壁变截面刚架对称临界载荷稳定问题优化算法 [J]. 沈阳建筑大学学报 (自然科学版), 2018, 34(1): 100 – 107.  
(HOU Xianglin, WANG Siwei, ZHANG Ruizhi, et al. An optimal algorithm for stability analysis of symmetrical critical loads of thin-walled frames with variable cross-sections [J]. Journal of Shenyang jianzhu university (natural science), 2018, 34(1): 100 – 107.)
- [15] 侯祥林, 马英成, 刘铁林. 有侧移对称变截面刚架屈曲临界载荷优化算法 [J]. 沈阳建筑大学学报 (自然科学版), 2020, 36(1): 94 – 99.  
(HOU Xianglin, MA Yingcheng, LIU Tielin. The buckling critical load optimization algorithm for a rigid frame with a sway symmetric variable cross section [J]. Journal of Shenyang jianzhu university (natural science), 2020, 36(1): 94 – 99.)
- [16] 侯祥林, 马英成, 开艳, 等. 简支梁大挠度弹性后屈曲载荷与变形的优化算法 [J]. 应用力学学报, 2021, 38(1): 340 – 344.  
(HOU Xianglin, MA Yingcheng, KAI Yan, et al. An optimization algorithm for calculating the post-buckling load and deformation of simply supported beams with large deflection [J]. Chinese journal of applied mechanics, 2021, 38(1): 340 – 344.)  
(责任编辑: 刘春光 英文审校: 唐玉兰)