

基于 Copula 函数的预应力钢筋节点连接的 装配式双柱混凝土桥墩主要失效模式分析

于玲,陈朋,刘杰,包龙生

(沈阳建筑大学交通工程学院,辽宁 沈阳 110168)

摘要 目的 研究地震作用下装配式双柱混凝土桥墩的主要失效模式,以提高其抗震性能. 方法 利用 ABAQUS 有限元软件对装配式双柱混凝土桥墩建立有限元模型. 通过随机样本点,得到不同的功能函数,对比直方图的特征分析功能函数. 对现浇桥墩和装配式双柱混凝土桥墩进行拟合以及对比分析,然后利用支持向量机法 SVM 计算桥墩失效概率. 结果 预应力双柱墩与现浇模型破坏接近,破坏的损伤均集中在桥墩塑性铰处,通过采用 Copula 二元分布函数考虑桥墩构件的相关性,得到现浇桥墩的失效概率为 8.754×10^{-6} ,装配式桥墩的失效概率为 3.513×10^{-7} . 结论 装配式混凝土桥墩的失效模式多以应力-刚度为主,应力失效和刚度集中使得桥墩过早失效. 同时预应力钢筋的存在也降低了桥墩的失效概率,大大提高了桥墩的抗震性能.

关键词 失效模式; Copula 函数; 装配式双柱混凝土桥墩; 失效概率

中图分类号 U445.4

文献标志码 A

Analysis of Main Failure Modes of Assembled Double-column Concrete Piers Connected by Prestressed Steel Bars Based on Copula Function

YU Ling, CHEN Peng, LIU Jie, BAO Longsheng

(School of Transportation Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang, China, 110168)

Abstract: In order to study the main failure modes of assembled double-column concrete piers under earthquake in order to improve their seismic performance. In this paper, the method of artificial searching is The finite element model of assembled double column concrete pier is established by using ABAQUS finite element software. Latin hypercube sampling method is used to obtain the sample points of random variables. Different functions are used according to the sample data. The corresponding binary frequency histogram is drawn by using the distribution function corresponding to origin software. According to the graphic features drawn, a suitable Copula function is se-

收稿日期:2018-09-25

基金项目:“十三五”国家重点研发计划重点专项基金项目(2018YFC0809606);辽宁省重点研发计划指导计划基金项目(2018416028);沈阳市建委城乡系统科研项目(201804)

作者简介:于玲(1971—),女,教授,主要从事道路工程等方面研究.

lected to fit and analyze the cast-in-place piers and assembled double-column concrete piers. Then the failure probability of piers is calculated by SVM. The result of the the damage of the prestressed double-column pier is close to that of the cast-in-situ model. The damage is concentrated in the plastic hinge of the pier. The failure probability of the cast-in-situ pier is 8.754×10^{-6} and the failure probability of the assembled pier is 3.513×10^{-7} . The conclusion of the the model of cast-in-situ pier and assembled concrete double-column pier is established and analyzed by Copula function. The result of binary normal distribution function is in good agreement with the result of empirical distribution function. The error is less than 5%. At the same time, the existence of prestressed steel bars also reduces the failure probability of piers, greatly improving the seismic performance of piers.

Key words: reliability degree; Copula function; fabricated double column concrete piers; failure probability

随着我国经济社会的迅速发展,人们对于桥梁发展理念的转变也在逐渐加快.现有的预制装配式桥梁具有建设施工周期短、施工质量高、成本低、节约资源和避免环境污染等优点,已经可以满足节能环保和可持续发展观的客观要求^[1-3].在国内的桥梁施工建设中,阻碍装配式桥墩推广的原因在于装配式双柱桥墩的失效模式以及失效机理缺少相关系统研究,桥梁在大震下局部构件会进入非线性,内力会重新得到分配,有些构件一旦达到屈服强度后,不能很好地评估桥梁的抗震性能^[4].为进一步推动预应力装配式桥墩在高度地震区中的应用,结合实际工程结构的特性和应用范围对装配式桥墩的失效模式进行分析,进而对桥梁安全性进行预测显得尤为重要.笔者以实际工程为依托,在考虑装配式双柱混凝土桥墩的线性分析的基础上,利用二元 Copula 函数计算其失效模式非线性相关性^[5],使得求解的失效概率更加准确和符合工程实际,以更好地研究装配式双柱混凝土桥墩的抗震性能.

1 Copula 函数的计算分析

根据已知的随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$,令 F 为多元随机变量联合概率函数,边

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq F_{x_1}^{-1}(u_1), X_2 \leq F_{x_2}^{-1}(u_2), \dots, X_n \leq F_{x_n}^{-1}(u_n)) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_n \leq u_n) = C(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

缘概率函数 $(F_{x_1}, F_{x_2}, \dots, F_{x_n})$,则存在函数 C ,使得对于任意的 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbf{R}^n$ 有等式(1)成立^[6-7]:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_{x_1}(x_1), F_{x_2}(x_2), \dots, F_{x_n}(x_n)). \quad (1)$$

若边缘分布函数 $(i=1, 2, \dots, n)$ 连续,则 Copula 对应的函数 F_{x_i} 唯一,从式(1)中可以得到随机变量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的联合概率密度:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_{x_1}(x_1), F_{x_2}(x_2), \dots, F_{x_n}(x_n)) \prod_{i=1}^n P_{x_i}(x_i). \quad (2)$$

式中: $P_{x_i}(x_i)$ 为边缘密度概率函数; $c(u)$ 为联合概率密度函数.

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial^2 c}{\partial u_1 \partial u_2, \dots, \partial u_n} (u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (3)$$

如果 $F_{x_i}^{-1}$ 为 F_{x_i} ($i=0, 1, 2, \dots, n$) 的广义逆函数,那么式(1)可以表示为

$$F(F_{x_1}^{-1}(u_1), F_{x_2}^{-1}(u_2), \dots, F_{x_n}^{-1}(u_n)) = C(u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (4)$$

其中: $u_i = F_{x_i}(i=1, 2, \dots, n)$; $(u_1, u_2, \dots, u_n) = u$

从式(4)可知,根据已知的边缘分布函数,通过积分变换得到一个 Copula 函数,且随机变量服从 $(0, 1)$ 均匀分布,并且 $U_i = F_{x_i}(X_i)$, $i=1, 2, \dots, n$.

因此,式(4)可以表示为

$$P(X_1 \leq F_{x_1}^{-1}(u_1), X_2 \leq F_{x_2}^{-1}(u_2), \dots, X_n \leq F_{x_n}^{-1}(u_n)) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_n \leq u_n) = C(u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (5)$$

结合式(1)~式(5)可以看出,利用 Copula 函数能将联合概率密度函数和边缘密度函数之间建立联系,并考虑多种因素影响下的概率求解,使得计算结果更加准确。

根据式(5),假设装配式双柱混凝土桥

$$P(g_1(X) \leq 0, g_2(X) \leq 0) = P(F_{g_1}(g_1(X)) \leq F_{g_1}(0), F_{g_2}(g_2(X)) \leq F_{g_2}(0)) = P(U_1 \leq F_{g_1}(0), U_2 \leq F_{g_2}(0)) = C(F_{g_1}(0), F_{g_2}(0)) = C(P_{f_{g_1}}, P_{f_{g_2}}).$$

由以上的推导过程可知符合 Sklar 定理^[11-13].从而可得二元串联体系的失效概

$$P_f = P(g_1(X) \leq 0 \cup g_2(X) \leq 0) = P(g_1(X) \leq 0) + P(g_2(X) \leq 0) - P(g_1(X) \leq 0, g_2(X) \leq 0) = P_{f_{g_1}} + P_{f_{g_2}} - C(P_{f_{g_1}}, P_{f_{g_2}}).$$

式中: $P_{f_{g_1}}$ 、 $P_{f_{g_2}}$ 分别为装配式双柱混凝土桥墩应力和刚度的失效概率; C 为二元串联体系 Copula 函数表达式。

2 装配式双柱混凝土桥墩模型建立

桥墩试件模型根据沈阳中央大街跨浑河桥第34号桥墩为原设计模型,采用1:4缩尺进行设计,承台采用C30混凝土,墩柱采用C40混凝土,盖梁采用C50混凝土.承台配有4根直径为12mm的纵筋,墩柱内配有8根直径为14mm的主筋,承台配有4根12mm的纵筋,后张法用15.2mm的钢绞线将其连接起来.通过有限元分析软件 ABAQUS 对装配式双柱混凝土桥墩建立有限元模型.箍筋、纵向钢筋、预应力筋选用线单元并选用桁架单元 T3D2,混凝土选用实体单元 8 节点六面体减缩积分 C3D8R 建模.整体现浇和预应力装配式桥墩模型如图 1、图 2 所示,根据分析所得刚度和位移曲线如图 3 所示,模拟得到应力云图如图 4、图 5 所示.

墩参数之间所对应的功能函数为

$$g_i(X) = g_i(X_1, X_2, \dots, X_n), i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

综合式(5)可以计算得到二元串联体系中的两个失效模式同时发生的概率^[8-10]为

率^[14-17]:

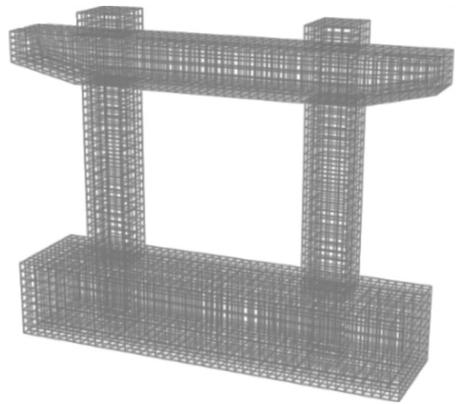


图1 现浇桥墩模型钢筋骨架网格划分

Fig. 1 Mesh division of steel frame of cast-in-place pier model

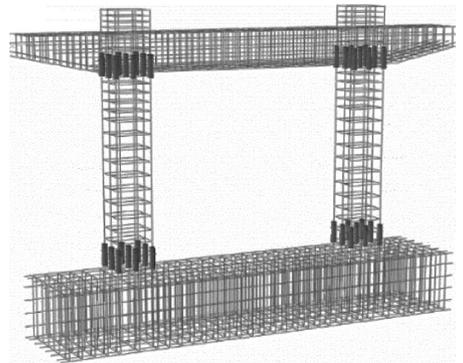


图2 预应力桥墩模型钢筋骨架应力云图

Fig. 2 Stress plot of steel frame of prestressed pier model

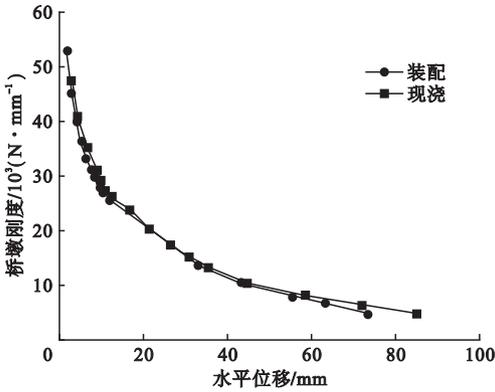
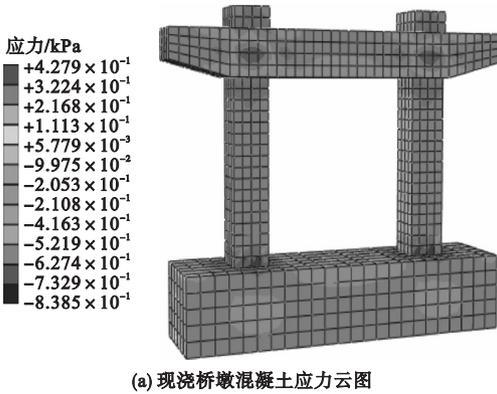
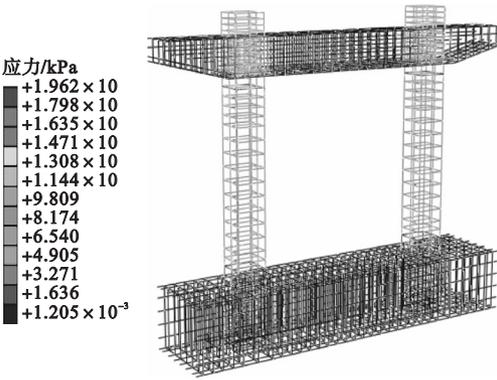


图3 刚度退化曲线

Fig. 3 Curves of stiffness degradation



(a) 现浇桥墩混凝土应力云图



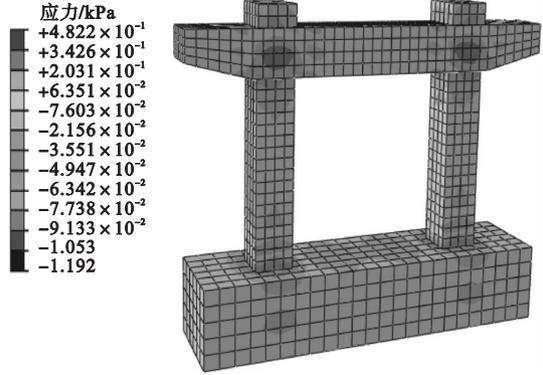
(b) 现浇桥墩钢筋骨架应力云图

图4 现浇桥墩应力云图

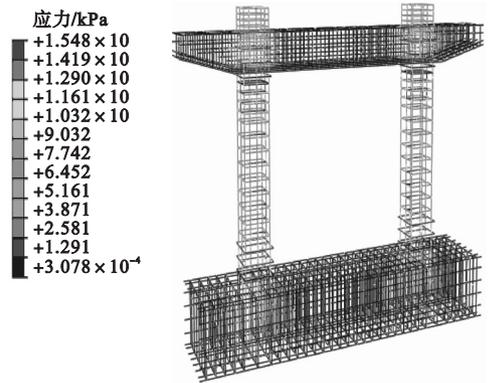
Fig. 4 Stress contour plot of cast-in-place bridge pier model

3 失效概率计算

结构系统通常包含串联系统、并联系统和串并联系统三类^[18]. 考虑由本构件组成的串联系统, 笔者以串联系统为例研究 Copula 函数对系统可靠度的影响规律. 根据 Copula



(a) 装配式桥墩混凝土应力云图



(b) 装配式桥墩钢筋骨架应力云图

图5 装配式桥墩应力云图

Fig. 5 Stress contour plot of assembled bridge pier model

函数对装配式双柱混凝土桥墩模型进行可靠度分析, 初步认定桥墩节点连接截面的应力失效和刚度失效为一个二元串联体系, 对桥墩节点截面的刚度失效和应力失效两种失效模式进行分析. 影响桥墩体系可靠度的随机变量和分布类型见表 1. 其中混凝土弹性模量、张拉控制应力以及混凝土容重分布类型为正态分布; 钢筋屈服应力为对数正态分布; 墩柱刚度为均匀分布. 利用支持向量机法计算得到应力失效概率和刚度失效概率结果见表 2.

根据所得到的随机变量参数和失效概率指标, 分析节点截面应力失效功能函数 X 和刚度失效功能函数 Y , 根据拉丁超立方抽样数据, 利用 Origin 软件, 分析获得 X 、 Y 的经验分布函数^[19].

表 1 影响可靠度的随机变量参数

Table 1 Parameters of random variables affecting reliability

参数	混凝土弹性 模量/MPa	钢筋屈服 应力/MPa	张拉控制 应力/MPa	墩柱刚度/ (kN·mm ⁻¹)	混凝土重力密度/ (kN·m ⁻³)
标准差	3.52 × 10 ³	0.06	140	28.5	1.31
平均值	3.52 × 10 ⁴	380.2	1 395	11.5	26.2

表 2 现浇桥墩和装配式双柱桥墩结果对比

Table 2 Comparison of cast-in-place piers and fabricated double column piers

桥墩形式	类型	可靠度指标	失效概率
现浇桥墩	应力失效	2.76	9.752 × 10 ⁻⁵
	刚度失效	4.88	5.433 × 10 ⁻⁸
装配式双柱桥墩	应力失效	4.22	8.654 × 10 ⁻⁵
	刚度失效	6.13	1.135 × 10 ⁻⁸

二元频率直方图可以估计 (U, V) 的联合概率密度函数,根据直方图选择相应的随机变量函数.利用二元正态 Copula 函数来拟

合原始数据,在 Origin 软件中进行图形分析,得到函数近似系数 λ 相关参数估计:

$$\hat{\lambda} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.914 \\ 0.914 & 1.000 \end{bmatrix}$$

利用二元正态 Copula 函数拟合的应力、刚度的功能函数曲线如图 6 所示.从图中可以看出,应力功能函数在 20 参数值时,应力经验分布函数和核分布估计最为接近;刚度功能函数参数在 0.15 时,应力经验分布函数和核分布估计最为接近,保证了装配式桥墩失效的计算精度.

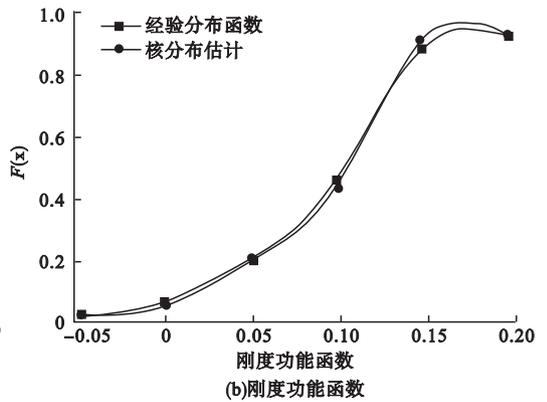
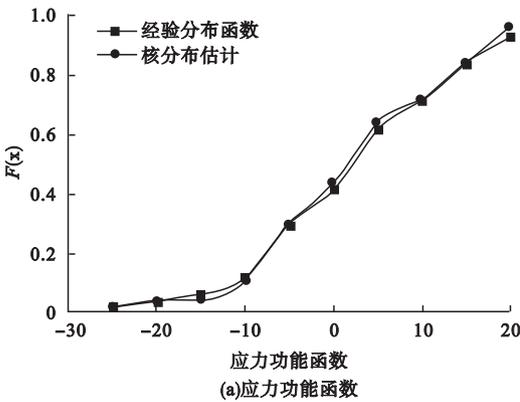


图 6 应力和刚度功能函数

Fig. 6 Stress and stiffness function

为了更好的表现应力功能函数和刚度功能函数的线性相关性,建立了刚度应力频率直方图(见图 7).

从图 7 中可以看到刚度和应力函数在 0~3 参数值变化内,应力-刚度的线性相关性不太明显;当应力失效和刚度退化参数大于 5 时,应力-刚度的线性相关性较为明显.

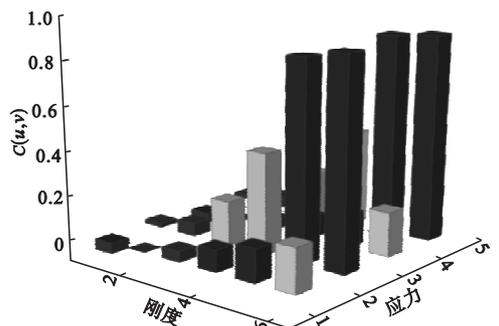


图 7 刚度和应力频率直方图

Fig. 7 Histogram of stiffness and stress frequency

计算得到的 λ 带入到式(7)中,得到二元串联系统的 Copula 函数.

$$C(u, v) = \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\lambda^2}} \cdot \exp\left[-\frac{s^2 - 2\lambda st + t^2}{2(1-\lambda^2)}\right] ds dt. \quad (7)$$

计算得到二元正态 Copula 密度函数和分布函数如图 8 所示.

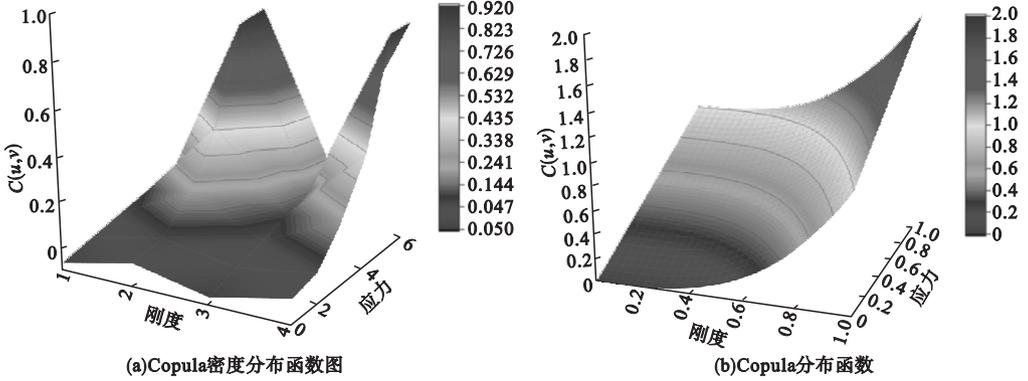


图 8 Copula 密度分布函数图和 Copula 分布函数

Fig. 8 Copula density distribution function diagram and Copula distribution function

从图 8 可以看到, Copula 函数描述了应力和刚度失效模式之间对称的相互关系. 根据所得到的函数关系进一步对模拟拟合原始数据进行检验评估. 令 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$) 是随机选取的样本数据, 令 $F_n(x)$ 和 $G_n(y)$ 为 X 和 Y 的经验函数,

$$\hat{\lambda}_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[F_n(x_i) \leq u]} I_{[G_n(y_i) \leq v]}, u, v \in [0, 1].$$

则 Copula 函数:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - n\lambda_i)^2}{n\lambda_i} = 0.0314.$$

式中: I 为频率表达函数. 利用卡方检验来比较 $I_{[F_n(x_i) \leq u]}$ 得到的二元正态 Copula 分布函数和经验 Copula 分布函数; χ^2 的大小能反应二元正态 Copula 拟合原始数据的情况^[20]. 卡方值越大, 越不符合; 卡方值越小, 偏差越小, 越趋于符合, 若两个值完全相等时, 卡方值就为 0, 表明理论值完全符合. 从得到的结果来看, 二元正态 Copula 函数能很好地模拟原始数据的相关性.

利用支持向量机 SVM 法:

$$g(x) = \text{sgn}\left(\sum_{i=1}^n a_i^* g_i k(x_i, x) + b^*\right).$$

计算出 $C(P_{fg1}, P_{fg2}) = 6.102 \times 10^{-9}$, 根据 Copula 二元串联模型, 最终求得现浇桥墩的失效概率为 8.754×10^{-6} , 装配式双柱桥墩的失效概率为 3.513×10^{-7} .

4 结 论

(1) 在加载的初期, 现浇桥墩的刚度低于装配式桥墩的刚度, 随着位移荷载的逐渐增加, 结构的非线性形变越来越显著, 桥墩刚度逐渐失效.

(2) Copula 函数能很好地描述桥墩参数之间的非线性相关性, 摆脱了传统函数计算时只能描述线性相关性的局限.

(3) 基于 Copula 函数所得到的二元正态分布函数与经验分布函数得到的结果更加吻合, 误差在 5% 以内, 既保证了计算精度, 又提高了随机抽样计算的效率.

(4) 通过采用 Copula 二元分布函数考虑桥墩构件的相关性, 得到了现浇桥墩的失效概率为 8.754×10^{-6} , 装配式桥墩的失效概率为 3.513×10^{-7} , 从而对研究更为复杂的桥梁体系奠定了理论研究基础.

参考文献

[1] YANG C S W, WERNER S D, DES ROCHES

- R. Seismic fragility analysis of skewed bridges in the central southeastern United States [J]. *Engineering structures*, 2015, 83: 116 – 128.
- [2] BANERJEE S. Statistical, empirical and mechanistic fragility analysis of concrete bridges [D]. Irvine: University of California, 2007.
- [3] BILLAH A M M M, ALAM M S. Seismic fragility assessment of highway bridges: a state-of-the-art review [J]. *Structure and infrastructure engineering*, 2015, 11(6): 804 – 832.
- [4] 包龙生, 王贺鑫, 汤维维, 等. 采用榀卯剪力键的预应力装配式双柱桥墩拟静力分析[J]. *沈阳建筑大学学报(自然科学版)*, 2018, 37(1): 27 – 34.
(BAO Longsheng, WANG Hexin, TANG Weiwei, et al. Quasi-static analysis of pre-stressed assembled double-column piers using tenon-mortise shear keys [J]. *Journal of Shenyang jianzhu university (natural science)*, 2018, 37(1): 27 – 34.)
- [5] 王向阳, 林友杨. 基于 Copula 函数的桥梁失效模式相关性研究[J]. *交通科学与工程*, 2017, 33(2): 18 – 22.
(WANG Xiangyang, LIN Youyang. Research on the correlation of bridge failure modes based on copula function [J]. *Journal of transportation science and engineering*, 2017, 33(2): 18 – 22.)
- [6] LEBRUN R, DUTFOY A. An innovating analysis of the Nataf transformation from the copula viewpoint [J]. *Probabilistic engineering mechanics*, 2009, 24(3): 312 – 320.
- [7] HONG H P, ZHOU W, ZHANG S, et al. Optimal condition-based maintenance decisions for systems with dependent stochastic degradation of components [J]. *Reliability engineering and system safety*, 2014, 121: 276 – 288.
- [8] GHOSH S. Modelling bivariate rainfall distribution and generating bivariate correlated rainfall data in neighbouring meteorological subdivisions using copula [J]. *Hydrological processes*, 2010, 24(24): 3558 – 3567.
- [9] LI D Q, TANG X S, PHOON K K, et al. Bivariate simulation using copula and its application to probabilistic pile settlement analysis [J]. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 2013, 37(6): 597 – 617.
- [10] MANDER J B, DHAKAL R P, MASHIKO N, et al. Incremental dynamic analysis applied to seismic financial risk assessment of bridges [J]. *Engineering structures*, 2006, 29(10): 2662 – 2672.
- [11] NELSEN R B. *An introduction to Copulas* [M]. New York: Springer, 2006.
- [12] JARA J M, GALVÁN A, JARA M, et al. Procedure for determining the seismic vulnerability of an irregular isolated bridge [J]. *Structure and infrastructure engineering*, 2013, 9(6): 516 – 528.
- [13] 叶美芳. 经验 Copula 过程在 Copula 拟合优度检验中的应用 [D]. 福州: 福建师范大学, 2013.
(YE Meifang. Application of empirical Copula process in Copula goodness of fit test [D]. Fuzhou: Fujian Normal University, 2013.)
- [14] 王其昂, 吴子燕, 贾兆平. 桥梁系统地震多维易损性分析 [J]. *工程力学*, 2013, 30(10): 192 – 198.
(Wang Qiang, WU Ziyang, JIA Zhaoping. Multidimensional fragility analysis of bridge system under earthquake [J]. *Engineering mechanics*, 2013, 30(10): 192 – 198.)
- [15] 吴帅兵, 李典庆, 周创兵. 结构可靠度分析中变量相关时三种变换方法的比较 [J]. *工程力学*, 2011, 28(5): 41 – 48.
(WU Shuaibing, LI Dianqing, ZHOU Chuangbing. Comparison among three transformation methods for structural reliability analysis with correlated variables [J]. *Engineering mechanics*, 2011, 28(5): 41 – 48.)
- [16] 管月稳, 俞茂宏, 赵坚, 等. 高应力状态下岩石非线性统一强度理论 [J]. *岩石力学与工程学报*, 2004, 23(13): 2143 – 2148.
(XIANG Yuewen, YU Maohong, ZHAO Jian, et al. Nonlinear unified strength theory of rocks under high stress state [J]. *Journal of rock mechanics and engineering*, 2004, 23(13): 2143 – 2148.)
- [17] 包龙生, 王淋, 于玲. 基于套筒连接的装配式双柱桥墩模型的有限元分析 [J]. *公路交通科技(应用技术版)*, 2018(5): 565 – 567.
(BAO Longsheng, WANG Lin, YU Ling. Finite element analysis of assembled double-column pier model based on sleeve connection [J]. *Highway transportation technology (applied technology edition)*, 2018(5): 565 – 567.)
- [18] 宋帅, 钱永久, 吴刚. 桥梁系统地震易损性分析的混合 Copula 函数方法 [J]. *工程力学*, 2017, 36(7): 894 – 899.
(SONG Shuai, QIAN Yongjiu, WU Gang. Mixed copula function method for seismic vulnerability analysis of bridge systems [J]. *Engineering mechanics*, 2017, 36(7): 894 – 899.)
- [19] 李贵乾. 钢筋混凝土桥墩抗震性能试验研究及数值模拟 [D]. 重庆: 重庆交通大学, 2010.
(LI Guiqian. Experimental study and numerical simulation of seismic behavior of reinforced concrete piers [D]. Chongqing: Chongqing Jiaotong University, 2010.)
- [20] 王海波, 叶献国, 孙利民. 钢筋混凝土桥墩抗震耗能试验及震害破坏等级的分析研究 [J]. *研究与探索*, 2006, 20(1): 1 – 3.
(WANG Haibo, YE Xianguo, SUN Limin. Seismic energy dissipation test of reinforced concrete piers and analysis and study of damage grade caused by earthquake [J]. *Research and exploration*, 2006, 20(1): 1 – 3.)
- (责任编辑: 杨永生 英文审校: 刘永军)