

# 复余弦解析映射的广义 M 集、充满 Julia 集 与其非线性迭代函数系的分形

陈 宁,海智刚,关博文

(沈阳建筑大学信息与控制工程学院,辽宁 沈阳 110168)

**摘 要** 目的 研究复余弦映射族  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  的广义 M 集、充满 Julia 集与其非线性迭代函数系的构造关系. 方法 分析复映射的数学特性:在动力平面上的中心周期窗口,考察指定参数下的迭代映射极值点的轨道是否有界,构造参数平面上的广义 M 集并寻找 M 集上周期参数区域的排列规律;在 M 集的不同周期参数区域挑选参数,构造动力平面上具有高周期吸引轨道的充满 Julia 集;选用  $N(N \geq 2)$  个广义 M 集 1 周期参数,在动力平面上  $x$  轴方向的中心周期窗口内构造出  $N$  个迭代映射;在  $N$  个迭代映射的充满 Julia 集的公共吸引域上,构造迭代函数系;采用迭代函数系中一个迭代映射的吸引不动点作为初始迭代点,通过随机选取迭代函数系中的迭代映射,跟踪这个吸引不动点在公共吸引域内的迭代轨道,构造出分形. 结果 采用单参  $n$  次复余弦映射族  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  的广义 M 集的高周期参数可以构造出在  $x$  轴方向具有可数无穷多周期窗口的连续排列的充满 Julia 集图形;采用  $N(N \geq 2)$  个 M 集的 1 周期参数可以构造出在动力平面上的中心周期窗口中充满 Julia 集的公共吸引域内的有效的非线性迭代函数系. 结论 提出的构造参数平面上的 M 集、并在 M 集上的 1 周期参数区域选取 2 个以上的参数构造出相应迭代迭代函数的方法,可以被用于大量构造复映射族  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  的非线性迭代函数系,随机迭代这种迭代函数系可以大量生成新颖分形.

**关键词** 分形;IFS;复映射;M 集;充满 Julia 集

中图分类号 TP391

文献标志码 A

## The Generalized M Sets, the Filled-in Julia Sets and the Fractals of their Nonlinear IFS from the Complex Analytic Cosine Mapping Family

CHEN Ning, HAI Zhigang, GUAN Bowen

(School of Information & Control Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang, China, 110168)

收稿日期:2018-07-09

基金项目:国家自然科学基金项目(61272253)

作者简介:陈宁(1958—),女,教授,博士,主要从事非线性动力系统计算机图形化及应用方面研究.

**Abstract:** The relationship between the generalized M sets, the filled-in Julia sets and the construction of the nonlinear IFS, from the complex analytic cosine mapping family  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$ , is investigated. The mathematics characters are analyzed; the generalized M sets in the parameter plane are constructed by the bounded orbits of the critical points in the central periodic-windows about the iterating mappings under appointed parameters; the arrangements of the periodic parameter regions in the M sets are investigated; the filled-in Julia sets with the high attracting periodic orbits are constructed in the dynamic plane;  $N$  iterating mappings are constructed in the central periodic-window along the  $x$ -axle by choosing  $N(N \geq 2)$  1-periodic parameters in the M sets; a nonlinear IFS is built in the common attracting region with the  $N$  iterating mappings; an attracting fixed point of a mapping in IFS is chosen as the initial iterating point; the fractal is constructed by the orbit of the attracting fixed point, which is obtained under the random iteration of the IFS. The result shows that the high period parameters in the M sets of the mapping family  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  can be used to construct the seriating filled-in Julia sets along the  $x$ -axle with countable infinitely many periodic-windows; the 1-period parameters in the M sets can be used to construct the nonlinear IFSs which can be used to produce a great number of novelty fractals.

**Key words:** fractal; IFS; complex mapping; M set; filled-in Julia set

分形几何学可以用来模拟、描绘大自然中各种复杂事物或现象的样貌性态. 分形几何的概念由美国数学家 B. B. Mandelbrot 提出, 相关理论研究和应用研究不断深入开展. 迭代函数系 (Iterated Function Systems, IFS) 是构造分形的重要方法, 由 Hutchinson 在 1981 提出, M. F. Barnsley 在 1985 年发展成了一套完整的理论<sup>[1]</sup>. IFS 构造分形技术在医疗、图像处理、艺术品 CAD 设计、实时动画等很多领域得到了广泛应用<sup>[2-9]</sup>. IFS 相关的理论研究和构造方法研究不断发展, 如欧氏空间或双曲空间上构造 IFS 的新方法、IFS 自身的各种数学性质、利用 IFS 构造重叠分形等的方法研究不断出现<sup>[10-18]</sup>. 随着相关的理论研究和构造方法的不断出现, 非线性 IFS 构造分形的研究也在理论研究和构造方法方面有了相应的进展. 加拿大学者 E. R. VRSCAY 和 D. WEIL<sup>[19]</sup> 进行了用来自实多项式  $x \leftarrow a_0 x^2 + a_1 x + a_2$  的非线性 IFS 构造分形吸引子的研究; 王兴元等<sup>[20]</sup> 将文献[19]中的模型扩展成复多项式映射  $z \leftarrow az^w + b$  和  $z \leftarrow \bar{a}z^w + b (w \in \mathbb{C})$ , 他们模拟了用上述复映射构造的 IFS 的分形吸引子, 讨论了完全离散的 IFS 的吸引子与它的地址集之间的关

系, 理论分析了控制参数变化对图形规律的影响; P. V. Loocke<sup>[21]</sup> 用 2 个线性的压缩映射和 2 个包括复变量平方根的映射构造了由 4 个映射组成的非线性 IFS, 在正多边形和圆上生成了分形图案; 范申<sup>[22]</sup> 关于一系列有向图确定的非线性迭代函数系的有界变差、有界谐变与 Gibbs - Lik 测度存在性等问题进行了深入的理论研究; 刘树群等<sup>[23]</sup> 研究了“基于多项式变换的迭代函数系”问题. 自 2016 年以来, 陈宁<sup>[24-25]</sup> 关于如何采用复多项式迭代映射构造非线性迭代函数系的研究发表了相关研究成果. 由于复解析三角映射有不同于多项式或有理式迭代映射的数学特性, 用其构造非线性 IFS 进而构造分形的工作还没有研究报道. 基于此, 笔者以解析的单参  $n$  次复余弦映射族模型  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  为研究对象, 对这类复映射族的广义 M 集、充满 Julia 集的构造, 以及如何将这种广义 M 集、充满 Julia 集与 IFS 理论相结合, 构造非线性迭代函数系等相关问题进行研究.

## 1 线性迭代函数系

通常生成各种平面分形的迭代函数系 (IFS) 是由  $N(N \geq 2)$  个线性压缩仿射

变换组成的,即IFS:  $\{R^2: w_1, w_2, \dots, w_N | i=1, 2, \dots, N\}$ ,  $w_i$  的表达式为

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}. \tag{1}$$

其中,参数  $(a_i, b_i, c_i, d_i \in R^1, i=1, 2, \dots, N)$  为实数. 文献 [26] 指出: 若参数满足式 (2) 的约束条件, 则此仿射变换是压缩变换.

$$\begin{cases} a^2 + c^2 < 1, \\ b^2 + d^2 < 1, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 1 + (ad - cd)^2. \end{cases} \tag{2}$$

满足式 (2) 约束条件, 且由式 (1) 构造的多个仿射变换构成了一个可以构造出奇怪吸引子或分形的线性压缩仿射IFS, 这种IFS的分形可以通过两种方法获得: 一种是从平面上的任意有界集通过无穷次遍历IFS中的每一个压缩变换获得分形; 另一种是从任意有界点的无穷次连续随机迭代IFS中的压缩变换获得分形<sup>[26]</sup>. 不难验证:  $N$  个满足式 (2)

$$f(z) = \lambda \cos(z) = \lambda \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = (\lambda_1 + i\lambda_2) \frac{e^{-y}(\cos(x) + i\sin(x)) + e^y(\cos(x) - i\sin(x))}{2} = \left( \frac{\lambda_1(e^{-y} + e^y)\cos(x) - \lambda_2(e^{-y} - e^y)\sin(x)}{2} + i \frac{\lambda_2(e^{-y} + e^y)\cos(x) + \lambda_1(e^{-y} - e^y)\sin(x)}{2} \right). \tag{3}$$

当  $n \geq 2$  时,  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  的坐标计算可以通过式 (4) 来计算

$$\cos(z) = u + iv = 0.5(e^{-y} + e^y)\cos(x) + i0.5(e^{-y} - e^y)\sin(x). \tag{4}$$

计算式 (4) 的  $n$  个复数  $(u + iv)$  的连乘再与复系数  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  的乘积得到所需坐标, 通过简单编程这种操作十分容易实现.

由复变函数理论可知, 复映射族  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  在动力平面上的极值点是使其 1 阶导数为零的点, 简单计算可知, 该复映射族在动力平面上的原点  $z_c = (0, 0)$  是迭代映射族的一个极值点, 即  $f'(z)|_{z_c=(0,0)} = (\lambda \cos^n(z))'|_{z_c=(0,0)} = (0, 0)$  且原点在  $x$  轴上的各周期窗口内的平移对称点也是复映射族的极值点.

由式 (4) 可知, 复解析余弦映射  $\cos(z)$  在动力平面的  $y$ -轴方向没有周期性, 而在

的由式 (1) 构造出来的线性压缩变换都是在动力平面上有吸引不动点  $p_i$ , 即  $w_i(p_i) = p_i$  的压缩变换, 并且对每个变换  $w_i$ , 其不动点的吸引域都是除去无穷远点以外的整张平面. 这个迭代函数系中所有压缩变换在动力平面上的公共吸引域也是除无穷远点以外的整张平面, 因此, IFS 的分形或奇怪吸引子可以从动力平面上的任意有界子集或有界点作为初始迭代集或初始迭代点迭代得到.

## 2 余弦复映射族的迭代点的坐标计算及周期特性

当  $n=1$  时, 复映射  $f(z) = \lambda \cos(z)$  是含有单复参数的复指数映射, 其中参数  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ , 动力平面上的点  $z = x + iy$ , 动力平面上迭代点  $f(z)$  用参数和平面点的坐标表示的计算式为

$x$ -轴方向以  $2\pi$  为周期. 由于全部实三角函数计算公式可以推广到复三角函数, 所以复解析余弦映射  $\cos^2(z) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2z))$ , 即这个迭代映射在  $x$ -轴方向以  $\pi$  为周期; 复解析余弦映射  $\cos^3(z) = \frac{1}{4}(3\cos(z) + \cos(3z))$ , 即这个迭代映射在  $x$ -轴方向以  $2\pi$  为周期. 由三角函数的乘积公式可以得出: 当  $n$  为偶数时, 复映射族为

$$\cos^n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \left[ \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} C_n^k \cos(n-2k)z + \frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} \right], \tag{5}$$

当  $n$  为奇数时, 复映射族为

$$\cos^n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \left[ \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^k \cos(n-2k)z \right]. \tag{6}$$

其中,  $C_n^k$  为  $n$  的组合. 式 (5) 与式 (6) 说明复

映射  $\cos^n(z)$  由  $x$ -轴方向不同周期的余弦复映射组成,而各项复映射中的最大周期是复映射  $\cos^n(z)$  的周期,即:当  $n$  为偶数时,  $\cos^n(z)$  以  $\pi$  为周期;当  $n$  为奇数时,  $\cos^n(z)$  以  $2\pi$  为周期. 因此,笔者研究的复映射族  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  在动力平面上点的迭代的周期特性为:在  $y$ -轴方向没有周期性;在  $x$ -轴方向,当  $n$  为奇、偶数时,周期分别为  $2\pi$  或  $\pi$ .

### 3 余弦复映射族的 M 集与充满 Julia 集

在复映射族  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  的动力系统图形化研究中,随着参数  $\lambda$  在参数平面上的变化,相应的迭代映射在动力平面上的动力学特性是变化的. 这个复迭代映射族在动力平面的  $x$  轴方向有周期特性,使得平面上点的迭代轨道在水平方向也是有周期性的. 如前文所述,动力平面上的原点是这个迭代映射族的极值点,而且原点在  $x$  轴上的周期平移点是迭代映射在每个周期窗口内的唯一极值点,因此,通过考察在给定参数下动力平面上的原在其周期窗口内的轨道是否有界就可以构造出参数平面上的广义 M 集. 在这样的 M 集中挑选参数  $\lambda$  所构造出的迭代映射,在动力平面上各周期窗口内均有一条吸引周期值大于等于 1 的吸引周期轨道,这条吸引周期轨道的吸引域是迭代映射在周期窗口内的充满 Julia 集.

图 1 是复映射族  $(f(z) = \lambda \cos^n(z), n = 1, 2, 3, 4)$  在参数平面上的广义 M 集,通过将绘图窗口内的给定分辨率下的相应参数  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  的  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  在动力平面上包含极值点  $(0,0)$  周期窗口内 ( $n = 1$  或 3, 周期窗口为  $[-\pi, \pi]$ ;  $n = 2$  或 4 时,周期窗口为  $[-\pi/2, \pi/2]$ ) 的点  $(0,0)$  的轨道有界的参数  $\lambda$  构成广义 M 集,参数平面上的绘图窗口中白色参数为相应参数下的迭代映射关于  $(0,0)$  点有逃逸轨道的参数;红色参数为

$(0,0)$  点的轨道收敛到有界的吸引周期轨道上的参数. 图 1 表明复映射族  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  在参数平面上的 M 集图形具有  $D_2 = (I, r_{180}, F, r_{180} \circ F)$  对称特性,其中  $I$  是单位矩阵、 $r_{180}$  是关于原点的  $180^\circ$  旋转、 $F$  是关于  $x$  轴的反射,即在这些广义 M 集的红色区域中任选参数  $\lambda$ ,则参数平面上的参数点  $I(\lambda)$ 、 $r_{180}(\lambda)$ 、 $F(\lambda)$  和  $r_{180} \circ F(\lambda)$  均是广义 M 集中的点.  $n$  幂次下的 M 集由可以构造具有大于等于 1 的吸引周期轨道的参数区域组成. 其中各 M 集均包含有原点在内的位于实轴上的横置“8”字形 1 周期参数区域;在 1 周期参数区域(1 周期芽苞)的边界上排列着高于 1 周期的参数区域(芽苞),在这些高周期参数区域(芽苞)上排列着更高周期的参数区域(芽苞). 除 M 集的 1 周期参数区域(芽苞)呈“倒 8”字参数区域外,其他高周期参数区域(芽苞)呈  $(2n - 1)$  个花瓣的芽苞参数区域,其中  $n$  为迭代映射中余弦的幂次. 在每个  $p$ -周期芽苞的一个花瓣参数区域(1 周期参数区域(芽苞)有 2 个花瓣;高周期参数区域(芽苞)上有  $(2n - 1)$  个花瓣)的边界上排列着 2 个从  $p$ -周期芽苞开始的  $I_p = \{1 \times p, 2 \times p, 3 \times p, 4 \times p, \dots\}$  参数芽苞序列;在每个去除  $1 \times p$  周期芽苞的  $I_p$  芽苞序列中,任意两个相邻的  $i \times p$  与  $(i + 1) \times p$  芽苞之间 ( $i \geq 2$ ) 产生了 2 个具有共同初始周期芽苞的芽苞序列  $A_1 = \{a_0, a_0 + (i \times p), a_0 + 2(i \times p), a_0 + 3(i \times p), \dots\}$  和  $A_2 = \{a_0, a_0 + (i + 1) \times p, a_0 + 2(i + 1) \times p, a_0 + 3(i + 1) \times p, \dots\}$ , 其中  $a_0 = (i \times p) + (i + 1) \times p$ .

图 2 是  $n = 1$  时,图 1(a) 中的 1 周期芽苞和 2 周期芽苞上的一个花瓣的  $I_1$  和  $I_2$  序列以及  $I_1$  序列中的 2 周期芽苞与 3 周期芽苞之间的  $A_1$  与  $A_2$  周期芽苞序列,此时,  $a_0 = (2 \times 1) + (2 + 1) \times 1 = 5$ . 图 3 给出了在图 1 中各 M 集上的  $I_p$  ( $p = 1, 2$ ) 序列周期芽苞以及  $A_1$  与  $A_2$  周期芽苞中选取参数,在相应迭代映射的包含原点在内的周期窗口内的充满

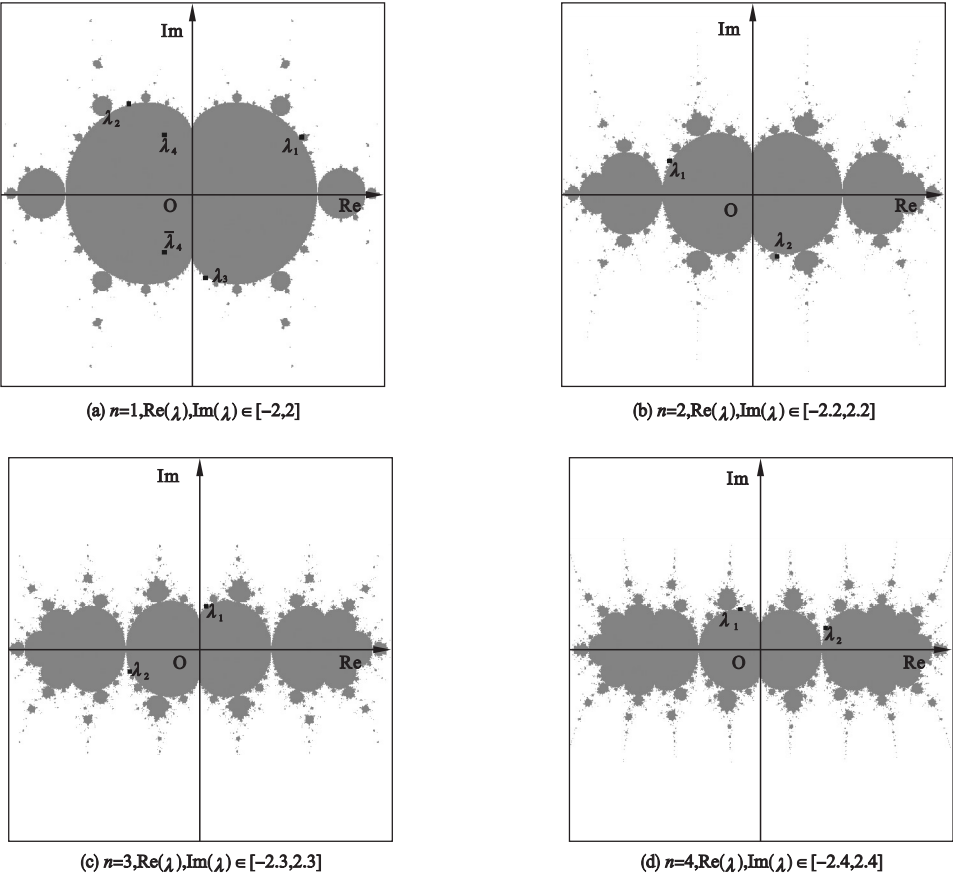


图 1 复映射族  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  的 M 集

Fig. 1 The M sets of  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$

Julia 集,这种图形通过考察周期窗口中的点是否到达其中的吸引周期轨道得到. 其中,图 3(a)是  $n=1$  时,来自图 1(a)中  $I_1$  序列的 2 和 3 周期芽苞之间的  $A_1$  与  $A_2$  芽苞序列的共同起始芽苞( $a_0 = (2 \times 1) + (2 + 1) \times 1 = 5$ )中参数  $\lambda_1$  的充满 Julia 集(5 吸引周期轨道的吸引域);图 3(b)是  $n=1$  时,来自图 1(a)中  $I_1$  序列的 3 和 4 周期芽苞之间的  $A_1$  与  $A_2$  芽苞序列的共同起始芽苞( $a_0 = (3 \times 1) + (4 + 1) \times 1 = 7$ )中参数  $\lambda_2$  的充满 Julia 集;图 3(c)是  $n=1$  时,来自图 1(a)中  $I_1$  序列的第 6 个芽苞中参数  $\lambda_3$  的充满 Julia 集;图 3(d)是  $n=2$  时,来自图 1(b)中  $I_1$  序列的 2 和 3 周期芽苞之间的  $A_1$  芽苞序列的第 2 个芽苞中参数  $\lambda_1$  的具有 7 吸引周期轨道的充满

Julia 集;图 3(e)是  $n=2$  时,来自图 1(b)中  $I_1$  序列中第 4 个芽苞中参数  $\lambda_2$  的具有 4 周期吸引轨道的充满 Julia 集;图 3(f)是  $n=3$  时,来自图 1(c)中  $I_1$  序列中第 5 个芽苞中参数  $\lambda_1$  的具有 5 周期吸引轨道的充满 Julia 集;图 3(g)是  $n=3$  时,来自图 1(c)中  $I_1$  序列的 2 和 3 周期芽苞之间的  $A_1$  芽苞序列的第 3 个芽苞中参数  $\lambda_2$  的具有 9 吸引周期轨道的充满 Julia 集;图 3(h)是  $n=4$  时,来自图 1(d)中  $I_1$  序列的 3 和 4 周期芽苞之间的  $A_1$  与  $A_2$  芽苞序列的共同起始 7 周期芽苞中参数  $\lambda_1$  的充满 Julia 集;图 3(i)是  $n=4$  时,来自图 1(d)中  $I_2$  序列中第 4 个芽苞中参数  $\lambda_2$  的具有 8 周期吸引轨道的充满 Julia 集.



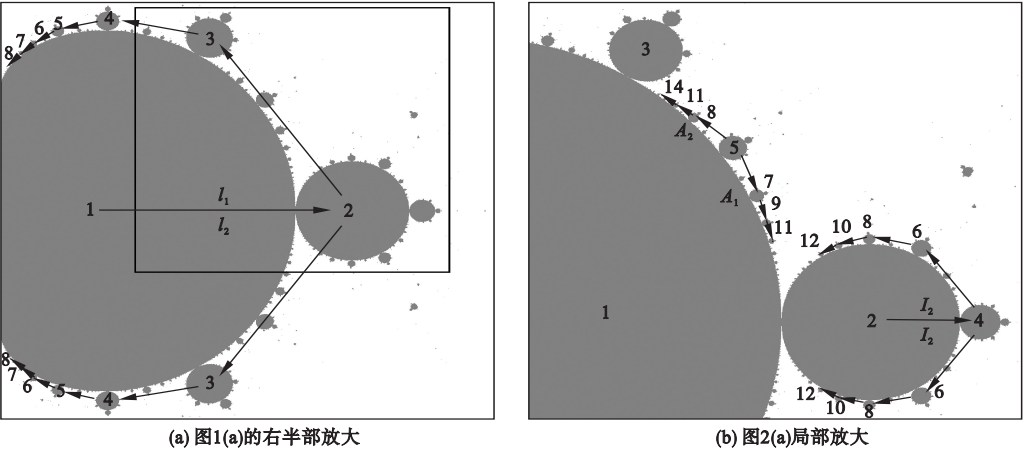


图 2 复映射  $f(z) = \lambda \cos(z)$  M 集上的  $I_1, I_2, A_1$  和  $A_2$  周期芽苞序列分布示意图

Fig. 2 The distribution of the bud - sequences of  $I_1, I_2, A_1$  and on the M set from  $f(z) = \lambda \cos(z)$

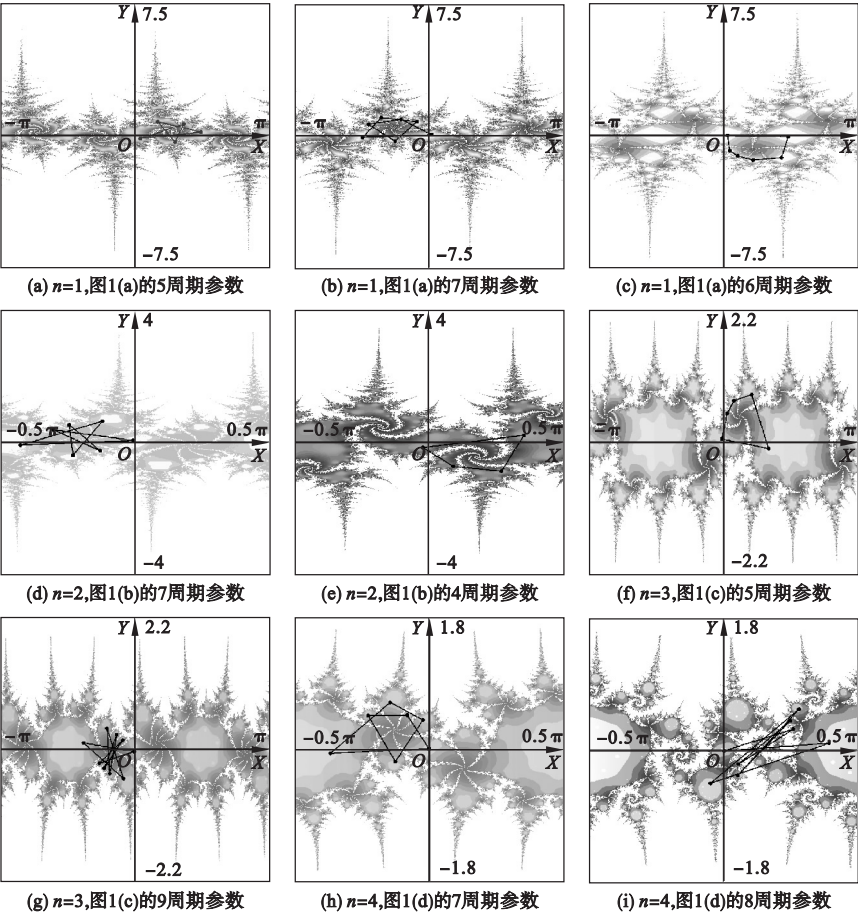


图 3 周期窗口内复映射族  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  的充满 Julia 集及其吸引周期轨道

Fig. 3 The filled - in Julia sets and their attracting orbits of  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  in the cycle windows

图 4 是图 3(c)、图 3(e) 和图 3(i) 的周期窗口中的充满 Julia 集在各自 3 个连续周期窗口中的充满 Julia 集图形. 事实上, 图 4 中的每个充满 Julia 集, 在各自的 3 个周期窗口中都分别有一条与图 3(c)、图 3(e) 和图 3(i) 窗口内相同的吸引周期轨道.

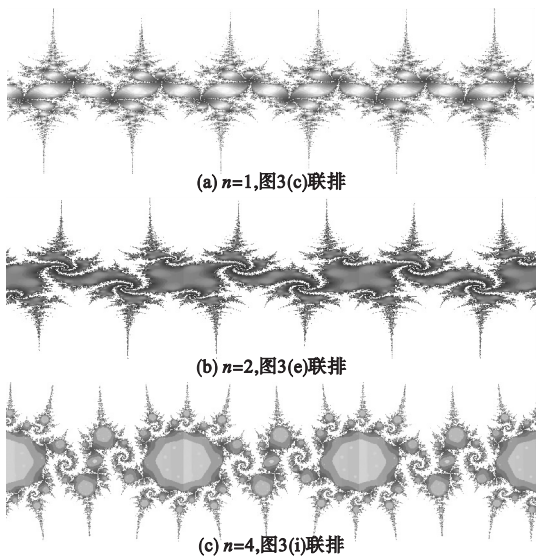


图4 复映射族 $f(z)=\lambda\cos^n(z)$ 在 $x$ 轴方向3个周期窗口内的充满Julia集

Fig. 4 The filled-in Julia sets of  $f(z)=\lambda\cos^n(z)$  in the 3 successive cycle-windows on the  $x$ -axle

4 余弦复映射族的IFS及分形

采用复映射族 $f(z)=\lambda\cos^n(z)$ 的广义M集的高周期参数,可以通过逃逸时间算法构造出在 $x$ 轴上连续排列的具有复杂分叉结构的充满Julia集图形.每一个高周期参数下的迭代映射在动力平面上的周期窗口中都有一条大于1的吸引周期轨道,这条吸引周期

轨道的吸引域就是图形结构随参数变化的充满Julia集.然而,如果在M集中心的1周期区域挑选参数,所构造出的充满Julia集图形结构与图3或图4是显著不同的,充满Julia集的结构单调.在周期窗口内的所有不逃逸点(充满Julia集的内点)的迭代轨道全部收敛到迭代映射在这个窗口内的1周期吸引不动点上,即1周期参数构造的迭代映射在周期窗口内是一个压缩映射.由第1节讨论可知,2个以上的压缩映射可以构造一个迭代函数系,进而生成分形.因此,笔者在 $n=1$ 的M集的1周期参数区域选取2个参数,如图1(a)的参数 $\lambda_4$ 和 $\bar{\lambda}_4$ ,组成一个迭代函数系 $\{f_{\lambda_4}(z)=\lambda_4\cos(z), f_{\bar{\lambda}_4}(z)=\bar{\lambda}_4\cos(z)\}$ ,在包含原点(0,0)的周期窗口内,随机迭代 $f_{\lambda_4}(z)$ 或 $f_{\bar{\lambda}_4}(z)$ ,生成了分形,如图5所示.图5(a)和图5(b)分别是复映射 $f_{\lambda_4}(z)$ 和 $f_{\bar{\lambda}_4}(z)$ 在周期窗口中的充满Julia集,显然这样的充满Julia集没有图3或图4那样的丰富结构,但是在2个充满Julia集的公共吸引域(图5(c)中灰色区域)上,出现了迭代函数系的分形,图5(d)是这个分形的放大图.这个实验表明,用迭代映射族 $f(z)=\lambda\cos^n(z)$ 构造非线性迭代函数系进而生成分形是可行的.

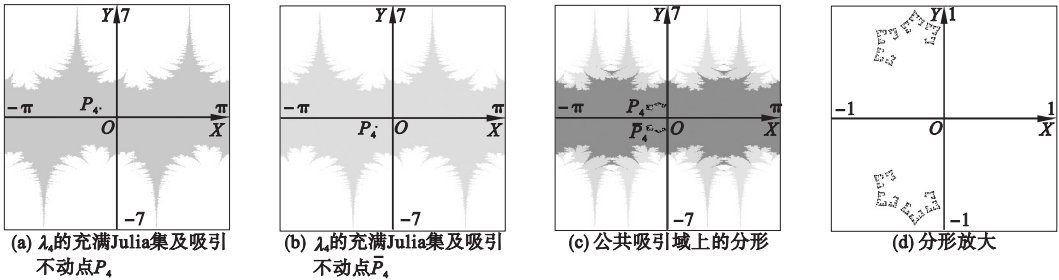


图5 图1(a)中参数 $\lambda_4$ 与 $\bar{\lambda}_4$ 构造非线性迭代函数系的分形

Fig. 5 The fractal of the IFS constructed with the parameters  $\lambda_4$  and  $\bar{\lambda}_4$  from Fig. 1(a)

从第1节讨论可知,由式(1)和式(2)可以构造平面上的线性IFS,且IFS中的所有迭代映射的吸引域都是相同的,是除无穷点外的整张平面,这些映射的吸引不动点的公共吸引域就是每个映射的吸引域.线性迭代函

数系的分形可以选取平面上的任意有界点作为初始迭代点构造出分形,因为无论初始点如何选取,对IFS中的任意一个迭代映射来说都在其吸引不动点的吸引域中,因此,点的迭代都会收敛到IFS的分形上.由于复映射

族 $f(z) = \lambda \cos^n(z)$ 的充满 Julia 集随参数变化而变化,因此,在相应的 M 集 1 周期参数区域(芽苞)上选取参数构造的迭代映射的 1 周期吸引不动点的吸引域也是变化的,并不是任意选取 2 个以上的 1 周期参数就可以构造出有效的非线性迭代函数系.然而,如果  $N$  个( $N \geq 2$ ) M 集 1 周期参数下的迭代映射  $\{f_{\lambda_i}(z), i = 1, 2, \dots, N\}$  的所有充满 Julia 集的公共吸引域包含  $N$  个迭代映射在动力平面上的吸引不动点,令这组迭代映射组成一迭代函数系,则

IFS:  $\{R^2: f_{\lambda_i}(z) = \lambda_i \cos^n(z) | i = 1, 2, \dots, N; \lambda_i \in M; f_{\lambda_i}(p_i) = p_i; p_i \in I_{i=1}^N A_i\}$ . (7)

其中,  $M$  为复映射  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  的广义 M 集,  $\lambda_i$  为 M 集中的 1 周期参数,  $p_i$  为复映射  $f_{\lambda_i}$  在动力平面上周期窗口中的吸引不动点,  $A_i$  为复映射  $f_{\lambda_i}$  在周期窗口中的充满 Julia 集,即吸引不动点  $p_i$  的吸引域. 式(7)是笔者提出的关于采用复映射族  $f(z) =$

$\lambda \cos^n(z)$  构造非线性 IFS 的方法. 取  $p_1$  为迭代函数系式(7)的初始迭代点,随机迭代式(7)构造出分形.

图 6 是复映射族  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  当  $n = 1, 2, 3, 4$  时,在 M 集的 1 周期参数区域随机挑选 2 个以上的参数,构造迭代函数系式(7),在各自包含原点(0,0)的周期窗口内构造出的分形图. 这些分形由在各 M 集 1 周期参数区域任选的 2 个、3 个和 4 个参数构成的式(7)定义的 IFS 随机迭代生成. 由于复映射族  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  的广义 M 集具有  $D_2$  对称特性,所以,取 1 周期参数区域的 4 个  $D_2$  对称的参数可以构造出  $D_2$  对称的分形. 也可以由多组  $D_2$  对称的参数生成分形,图 6 (d)是在  $n = 4$  的 M 集的 1 周期区域中选取参数  $\lambda_1 = 0.193\ 250 + i0.334\ 719$ ,并选取与这个参数成  $D_2$  对称的另外 3 个参数,以及在  $x$  轴上与  $\lambda_1$  的模值相等的 2 个参数,共 6 个参数构成的迭代函数系的分形.

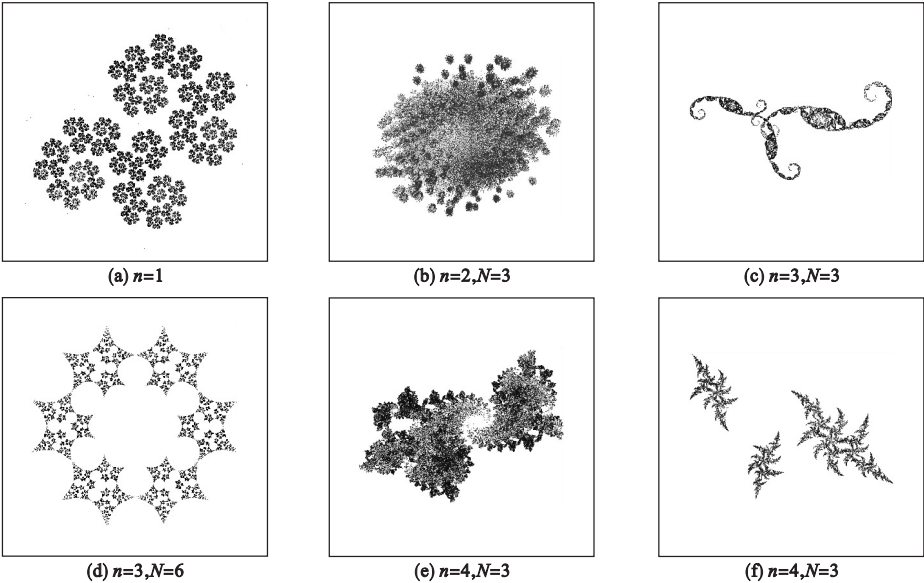


图 6 用  $N$  个 1 周期参数构造的复映射  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  的 IFS 的分形

**Fig. 6** The fractals of IFSs constructed from  $N$  mappings of  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  with 1-cycle parameters

图 6 表明用复映射族  $f(z) = \lambda \cos^n(z)$  构造的非线性迭代函数系所生成的分形,可以表达比线性迭代函数系更复杂的现象. 表 1 给出了构造图 6 其他分形的随机挑选的参数和绘图范围等相关信息.



表1 复映射族 $f(z)=\lambda\cos^n(z)$ 构造IFS的参数及相关绘图信息

Table 1 Parameters constructing the IFSs with $f(z) = \lambda \cos^n(z)$ and the relating information drawing fractals							
图号	幂次 $n$	参数 ( $\lambda$ )	绘图窗口范围				迭代次数/ $10^6$ 次
			Xmin	Xmax	Ymin	Ymax	
图 6(a)	1	$\lambda_1 = -0.372\ 040 + i0.762\ 600$	-1.09	-0.26	-0.03	0.86	2
		$\lambda_2 = -0.670\ 720 + i0.580\ 320$					
图 6(b)	2	$\lambda_1 = -0.148\ 000 - i0.114\ 800$	0.00	1.20	-0.69	0.51	50
		$\lambda_2 = 0.824\ 000 - i0.361\ 200$					
图 6(c)	2	$\lambda_3 = 0.924\ 000 - i0.299\ 600$	-1.09	1.68	-1.56	1.21	10
		$\lambda_1 = 0.080\ 000 - i0.500\ 000$					
图 6(d)	3	$\lambda_2 = -0.480\ 000 + i0.180\ 000$	-0.74	0.74	-0.74	0.74	20
		$\lambda_3 = 0.900\ 000 - i0.140\ 000$					
图 6(e)	4	$\lambda_1 = 0.193\ 250 + i0.334\ 719$	-0.11	0.89	-0.55	0.45	3 000
		$\lambda_2, \lambda_3$ 和 $\lambda_4$ 是 $\lambda_1$ 的 $D_2$ 对称参数					
图 6(f)	4	$\lambda_5 = 0.386\ 5, \lambda_6 = -0.386\ 5$	-0.51	0.91	-0.74	0.68	90
		$\lambda_1 = 0.320\ 000 - i0.320\ 000$					
		$\lambda_2 = 0.220\ 000 + i0.000\ 000$					
		$\lambda_3 = 0.700\ 000 - i0.100\ 000$					
		$\lambda_1 = 0.520\ 000 - i0.240\ 000$					
		$\lambda_2 = -0.240\ 000 + i0.260\ 000$					
		$\lambda_3 = 0.000\ 000 - i0.300\ 000$					

5 结 论

复映射族 $f(z)=\lambda\cos^n(z)$ 在动力平面上的 $x$ 轴方向有可数无穷多周期窗口, $n$ 为奇数时,周期为 $2\pi$ ;  $n$ 为偶数时,周期为 $\pi$ . 原点 $(0,0)$ 是动力平面上中心周期窗口内复映射 $f(z)=\lambda\cos^n(z)$ 的极值点. 判断给定参数下迭代映射关于原点轨道是否有界,可以构造 $f(z)=\lambda\cos^n(z)$ 在参数平面上的广义M集. 广义M集上以 $I_p(p=1,2,\cdots)$ 、 $A_1$ 和 $A_2$ 芽苞序列形式排列着层层自相似周期芽苞区域. 在周期值大于1的芽苞区域挑选参数,可以构造出在 $x$ 轴上重复排列的随吸引周期轨道值变化的分叉充满Julia集. 在广义M集的1周期参数区域随机挑选 $N$ 个参数,构造式(7)给出的IFS,可以构造由 $f(z)=\lambda\cos^n(z)$ 迭代映射组成的迭代函数系,并随机迭代生成分形. 由于迭代映射族 $f(z)=\lambda\cos^n(z)$ 的广义M集具有 $D_2$ 对称特性,可以在广义M集的1周期参数区域挑选一组

或多组 $D_2$ 对称参数构造出 $D_2$ 对称分形. 笔者所提出的方法可以大量构造由复映射族 $f(z)=\lambda\cos^n(z)$ 构成的非线性迭代函数系,并生成新颖分形.

参考文献

[ 1 ] BARNESLEY M F. Fractals everywhere [ M ]. 2nd ed. Boston: Academic Press, 1993.

[ 2 ] CRACIUNESCU O I, DAS S K, POULSON J M, et al. Three-dimensional tumor perfusion reconstruction using fractal interpolation functions [ J ]. IEEE transactions on biomedical engineering, 2001, 48 ( 4 ): 462 – 473.

[ 3 ] SOO S C, YU K M, CHIU W K. Modeling and fabrication of artistic products based on IFS fractal representation [ J ]. Computer-aided design, 2006, 38: 755 – 769.

[ 4 ] PARAMANATHAN P, UTHAYKUMAR R. Fractal interpolation on the koch curve [ J ]. Computers and mathematics with applications, 2010, 59: 3229 – 3233.

[ 5 ] MARTYN T. Realistic rendering 3D IFS fractals in real-time with graphics accelerators [ J ]. Computers & graphics, 2010, 34: 167 – 175.

- [6] ZHAI Mingyue, FERNANDEZ-MARTINEZ J L, RECTOR J W. A new fractal interpolation algorithm and its applications to self-affine signal reconstruction [J]. *Fractals*, 2011, 19(3): 355–365.
- [7] DARMANTO T, SUWARDI I S, MUNIR R. Cyclical metamorphic animation of fractal images based on a family of multi-transitional IFS code approach [C]// IEEE Conference on Control System and Industrial Informatics (ICCSII 2012). [S. l.]: IEEE, 2012.
- [8] THANUSHKODI K G, BHAVANI S. Comparison of fractal coding methods for medical image compression [J]. *IET image processing*, 2013, 7(7): 686–693.
- [9] GENTIL C, NEVEU M. Mixed-aspect fractal surfaces [J]. *Computer aided design*, 2013, 45: 432–439.
- [10] LAU K, NGAI S, RAO H. Iterated function systems with overlaps and self-similar measures [J]. *Journal of the London mathematical society*, 2001, 63(1): 99–116.
- [11] DEKKING F M, ERWAL P V. The boundary of the attractor of a recurrent iterated function system [J]. *Fractals*, 2002, 10(1): 77–89.
- [12] LAU K S, WANG X Y. Iterated function systems with a weak separation condition [J]. *Studia mathematica*, 2004, 16(3): 249–268.
- [13] CHEN Ning, DING Hao, TANG Ming. Automatic generation of symmetric IFS's contracted in the hyperbolic plane [J]. *Chaos, solitons and fractals*, 2009, 41(4): 829–842.
- [14] MARTYN T. The smallest enclosing disc of an affine IFS fractal [J]. *Fractals*, 2009, 17(3): 269–281.
- [15] SAHU D R, ANINDITA C, DUBEY R P. K-iterated function system [J]. *Fractals*, 2010, 18(1): 139–144.
- [16] RICHARD B, MICHAEL F, BRENDAN S. Higher block IFS 2: relations between IFS with different levels of memory [J]. *Fractals*, 2010, 18(4): 399–408.
- [17] JAN A, MIPOSLAV R. Multivalued fractals and hyper fractals [J]. *International journal of bifurcation and chaos*, 2012, 22(1): 1250009–1250036.
- [18] STENFLO O. Iterated function systems with a given continuous stationary distribution [J]. *Fractals*, 2012, 20(3): 197–202.
- [19] VRSCAY E R, WEIL D. “Missingmoment” and perturbative methods for polynomial iterated function systems [J]. *Physica D*, 1991, 50(2): 478–492.
- [20] WANG Xingyuan, LI Fanping. A class of nonlinear iterated function system attractors [J]. *Nonlinear analysis*, 2009, 70: 830–838.
- [21] LOOCKE P V. Non-linear iterated function systems and the creation of fractals patterns over regular polygons [J]. *Computers and graphics*, 2009, 33: 698–704.
- [22] 范申. 非线性迭代函数系与 Schrödinger 算子的谱的分形性质 [D]. 北京: 清华大学, 2010. (FAN Shen. Nonlinear iterated function systems and fractal properties of the spectrum of Schrödinger operator [D]. Beijing: Tsinghua University, 2010)
- [23] 刘树群, 刘罗生. 基于多项式变换的迭代函数系统 [J]. *兰州理工大学学报*, 2011, 37(1): 81–85. (LIU Shuqun, LIU Luosheng. Iterative function system based on polynomial transformation [J]. *Journal of Lanzhou university of technology*, 2011, 37(1): 81–85)
- [24] 陈宁, 冯冬冬. 由 2 次单参复解析多项式构造非线性迭代函数系 [J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2016, 28(2): 255–259. (CHEN Ning, FENG Dongdong. Nonlinear IFS from complex quadratic polynomials with single complex parameter [J]. *Journal of computer-aided design & computer graphics*, 2016, 28(2): 255–259.)
- [25] 陈宁, 吴晓辰, 李明. 非解析复映射构造 IFS 的参数研究 [J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2017, 29(7): 1267–1274. (CHEN Ning, WU Xiaochen, LI Ming. Research on parameters of construction of IFS's from non-analytical complex mappings [J]. *Journal of computer-aided design & computer graphics*, 2017, 29(7): 1267–1274.)
- [26] FIELD M, GOLUBITSKY Y M. Symmetry in chaos [M]. New York: Oxford University Press, 1992. (责任编辑: 刘春光 英文审校: 范丽婷)