

# 基于随机有限元的修正剑桥模型可靠性研究

陆征然<sup>1</sup>,张茂胜<sup>1</sup>,郭超<sup>2</sup>

(1. 沈阳建筑大学管理学院,辽宁 沈阳 110168;2. 沈阳建筑大学土木工程学院,辽宁 沈阳 110168)

**摘要** 目的 研究修正剑桥模型中作为体系控制性输入随机变量的初始等向正常固结曲线斜率对作为控制性输出随机变量的地基土体宏观固结沉降量的可靠度影响。方法 基于 Monte Carlo 法的基本原理,编制 Python 脚本程序,驱动 ABAQUS 构建以修正剑桥模型为本构模型的一维地基固结沉降随机有限元分析体系。以修正剑桥模型中初始等向正常固结曲线 INCL 的斜率作为体系控制性输入随机变量,地基土体固结沉降量作为体系控制性输出随机变量。通过统计回归分析两者之间的相关性,最终确立了固结沉降量的概率分布模型与可靠度指标。结果 基于确定性有限元分析的固结沉降量计算结果仅有 60% 的保证率。降低控制性输入随机变量的变异系数大小可以提高控制性输出随机变量的可靠度指标。当正常固结曲线 INCL 的斜率服从 Gauss 分布时,土体宏观固结沉降量不拒绝 Generalized Extreme Value - III 分布。结论 修正剑桥模型能够科学合理地再现复杂应力路径下土体的应力-应变关系,并揭示出模型参数的离散性将引起地基土体宏观沉降的随机性。

**关键词** 修正剑桥模型;随机有限元;可靠性;固结沉降

中图分类号 TU43

文献标志码 A

## Reliability Analysis of Modified Cambridge Model Based on Stochastic Finite Elements Methods

LU Zhengran<sup>1</sup>, ZHANG Maosheng<sup>1</sup>, GUO Chao<sup>2</sup>

(1. School of Management, Shenyang Jianzhu University, Shenyang, China, 110168; 2. School of Civil Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang, China, 110168)

**Abstract:** In this paper, the plastic slope of the initial normal consolidation line of the MCM was deemed to be the dominant input random variable, and its effects to the reliability of foundation consolidation settlement was deeply researched. The Stochastic Finite Elements Methods analysis system of one dimensional consolidation of the foundation with the MCM was constructed by the Python script process driving the ABAQUS main progress that based on the Monte Carlo theories. The plastic slope of the initial normal consolidation line of the MCM was the dominant input ran-

收稿日期:2018-03-08

基金项目:国家自然科学基金项目(51308255);辽宁省自然科学基金项目(20170540741);沈阳建筑大学基础学科基金项目(CXPY2017017)

作者简介:陆征然(1982—),女,副教授,博士,主要从事工程结构可靠度方面研究。

dom variable, and the consolidation settlement of soil foundation was the dominant output random variable. The probability distribution model and reliability index of foundation consolidation settlement were finally determined through the statistical regression of the relevance of above two random variables. The results showed that the ensuring probability of calculation result of consolidation settlement was only 60% basing on the deterministic finite element analysis, and the reliability index of dominant output random variable would be improved by reducing the coefficient of variation of dominant input variable. When the distribution of plastic slope of the initial normal consolidation line obeyed Gauss distribution, the foundation consolidation settlement would obey Generalized Extreme Value-III distribution. The MCM not only can reflect the stress-strain relationship under the complicated stress trajectory scientifically, but also reveal that the dispersion of the MCM parameters would lead to the random of the settlement of the foundation.

**Key words:** modified cambridge model; stochastic finite elements methods; reliability; consolidation settlement

土体在多次加、卸荷的复杂应力路径下会发生各种沉降变形,造成基础沉降甚至倾斜,进而影响地基基础的正常服役性能,甚至导致其失效破坏。由于修正剑桥模型能够科学地反映土体在多次复杂加、卸荷复杂应力路径下的固结过程,因而其在地基相关的有限元分析中得到了广泛应用。R. I. Borja等<sup>[1-2]</sup>将其应用到各向异性、有限应变模型的研究和非饱和土本构模型的研究中。袁克阔等<sup>[3]</sup>将莫尔-库仑强度理论与剑桥模型相结合,研究了考虑黏聚特性和拉压不等效应的修正剑桥模型。R. Kohler 和 G. Hofstetter<sup>[4]</sup>通过引入基质吸力,将剑桥模型扩展到非饱和土的本构模型。连镇营等<sup>[5]</sup>将剑桥模型与 SMP 强度准则相结合,并将其应用到基坑工程中。范庆来等<sup>[6-7]</sup>通过隐式积分算法将剑桥模型实现了有限元程序化;关云飞、陈善雄等<sup>[8-9]</sup>将修正的剑桥模型在 ANSYS、Flac3D 中进行二次开发,效果较好。姚仰平等<sup>[10-11]</sup>在剑桥模型的基础上提出适合超固结土的统一硬化(UH)模型,描述超固结土的硬化、软化、剪缩和剪胀等应力应变特性以及应力路径。Rao P 等<sup>[12]</sup>基于球形扩张理论获得了在排水固结条件下修正剑桥模型的弹塑性解析解。孙德安等<sup>[13]</sup>考虑初始应力各向异性改进了原始剑桥模型;M. D. Liu 和 J. P. Carter<sup>[14]</sup>通过引入初始附加孔隙比的概念发

展了考虑土体结构性的剑桥模型。黄雨等<sup>[15]</sup>基于下负荷面剑桥模型,针对超固结土的三轴排水和不排水试验进行了数据模拟。沈恺伦等<sup>[16]</sup>通过对固结软黏土的三轴排水应力路径试验和三轴不排水剪切试验,揭示了典型结构性软黏土的屈服特性和屈服后的塑性流动特征。谢定义等<sup>[17]</sup>提出将土结构性定量参数引入土的变形本构关系和强度本构关系。学者通过理论推导并结合室内三轴模拟实际地基土体在加、卸载应力路径下的试验,进而得到修正剑桥模型的物理力学参数。但由于受到试验设备、试验人员、土样的离散性等条件的限制,通常导致试验不可重复。并且,在有限元分析过程中,由于地基工程工作机理非常复杂,利用确定性数值分析方法往往难以获得理想结果。此外,模型参数的离散性对计算结果产生较大影响。然而,国内外学者展开的土体本构参数离散性对工程结构可靠度影响研究非常有限,代表性工作有:王保田等<sup>[18]</sup>基于 Flac3D 中的修正剑桥模型,以最小二乘法支持向量机为核心技术,结合蒙特卡罗法构建计算模型,结果表明, Monte Carlo 法结合支持向量机的沉降可靠度计算方法应用于公路软基沉降可靠度计算是可行的;刘宁等<sup>[19]</sup>提出随机有限元法在地基沉降概率分析和可靠度计算中的应用。近些年来,逐步发展起来的随机有限元技术,能够较好

地反映各种不确定性因素对计算结果可靠性的影响,并且可重复性好,是一种有效的研究手段.因此,笔者基于 Monte Carlo 法基本原理,利用 ABAQUS 随机有限元分析平台,研究修正剑桥模型中初始等向正常固结曲线 INCL 斜率  $\lambda$  的离散性对地基沉降量计算可靠度的影响,并提出了相应的分析方法,为地基沉降稳定分析、基坑开挖对周围建筑物影响等分析提供可靠度分析方法.

1 修正剑桥模型原理

修正剑桥模型是能够反映土体体积压缩、回弹,并采用向后欧拉积分塑性相关流动屈服准则的典型弹塑性本构模型,其应变率分为弹、塑性两部分<sup>[20-21]</sup>.弹性部分采用能够反映体积压缩回弹的多孔弹性硬化模型.该模型可以描述应力-应变的硬化、软化以及土体在正常体积下的变形,它是通过临界状态面的大小反映土体的硬化与软化.临界状态面是在有效应力空间中构建的以坐标原点为顶点,静水压应力为中心轴的向外无限延伸的圆锥形曲面,在此面上为纯剪应力,土骨架在恒定有效应力作用下发生塑性流动. $\pi$  平面为正交于静水压应力轴的圆平面,通过平均应力轴  $p$  与正交此轴的偏应力  $t$  定义的偏应力平面如图 1 所示.图中  $M$  为临界状态线在  $p-t$  平面上的斜率.

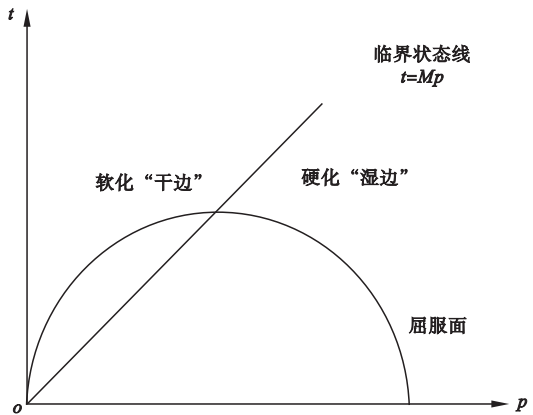


图1 修正剑桥模型  $p-t$  平面

Fig. 1  $p-t$  plane of modified cambridge model

修正剑桥模型的屈服面在  $\pi$  平面上与临界状态线重合.在  $p-t$  平面内为两段椭圆形曲线,其中一段以原点为端点,另一端点是此段椭圆线与临界状态线的交点,在交点处椭圆的切线与等向应力轴平行.另一端的一端与上一段在临界状态线交点处平滑连接,另一端与平均应力轴  $p$  正交,塑性流动方向正交与此面.

假定土体硬化、软化仅与塑性体应变有关,其控制着塑性屈服面的大小,当发生塑性体积收缩时(土骨架受压)屈服面变大,固结排水,此时土体应力处于临界状态线左侧  $t < Mp$ ,土体软化,通常定义为“干边”状态.相反,当发生塑性体积膨胀时(土骨架受拉)屈服面变小,固结不排水,此时土体应力处于临界状态线右侧  $t > Mp$ ,土体硬化,通常定义为“湿边”状态.修正剑桥模型的屈服法则则是通过 Mises 等效应力定义  $p-t$  平面(见图 2).

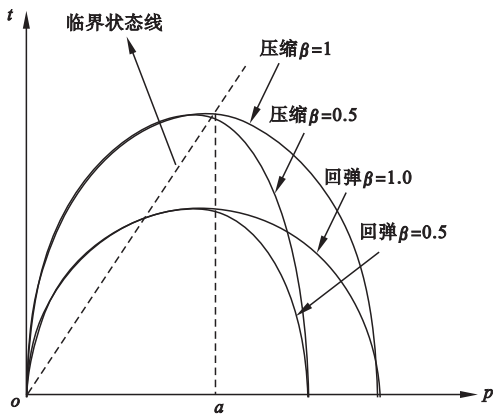


图2 修正剑桥模型中土的屈服面

Fig. 2 Clay yield surfaces in the modified cambridge model

屈服面方程为

$$\frac{1}{\beta^2}(\frac{p}{q}-1)^2+(\frac{t}{Ma})^2=1. \tag{1}$$

式中: $a$  为椭圆与临界状态线交点所对应的  $p$  值; $\beta$  为控制屈服面形状的参数;其中, $\beta \leq 1$  表征屈服面在  $p-t$  平面内“湿边”侧的特征;当  $\beta = 1$  时屈服面“干”、“湿”侧对称.当塑性势面与屈服面不重合时称为非关联流动法则;与之相反当塑性势面与屈服面完全重合

时则称为关联流动法则,根据关联流动法则,屈服面的大小是通过  $a$  来确定的,其控制着土体硬化、软化的路径.而屈服面是区分弹性状态和塑性状态的界限,若应力点出现在屈服面内部则称为弹性状态,反之,若应力点出现在屈服面外部则称为塑性状态.

修正剑桥模型中屈服面的大小和孔隙比、应力状态之间应该是协调的.在由孔隙比  $e$  和对数形式的有效应力  $\ln p'$  组成的  $e - \ln p'$  平面内,正常固结与回弹曲线如图 3 所示.临界状态线 CSL 在  $e$  轴上的截距为  $e_{cs}$ .对数硬化常数  $\lambda$  (表示为图 3 中初始等向固结曲线 INCL 的斜率);对数体积回弹模量  $k$  (表示为图 3 中临界状态线 CSL 斜率);以及  $M$  分别为剑桥模型的三个参数.其中,  $\lambda$  和  $k$  值可以利用不同的等向压缩与膨胀试验得到,  $M$  值可以通过三轴排水剪切或不排水剪切试验得出.

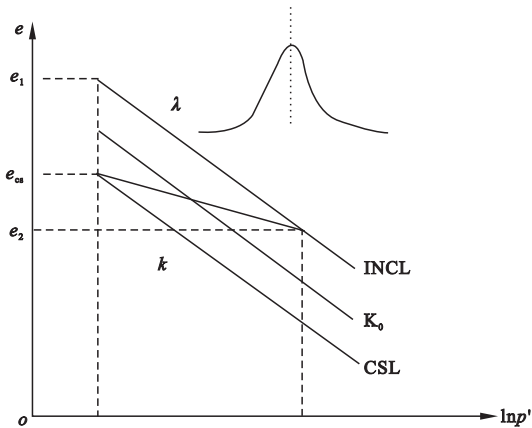


图 3 半对数坐标系下的正常固结、临界状态和回弹曲线

Fig. 3 The normal consolidated line, critical state line and unload-reload line in semilogarithmic coordinates

土层中的孔压是沿深度呈线性分布的,且当土体为正常固结土时,则意味着土层任意深度处的应力点都将位于屈服面上.同样,由于土层从上到下的有效应力是变化的,从而,初始屈服面的大小从上到下也将呈现变化,根据修正剑桥模型的理论,其屈服面方程为

$$\frac{M^2 p'^2}{q^2 + M^2 p'^2} = \frac{p'}{p'_0} \tag{2}$$

将式(2)改写为

$$p'_0 = \frac{q^2 + M^2 p'^2}{M^2 p'} = \frac{q^2}{M^2 p'} + p' \tag{3}$$

式中:  $p'$  为有效平均应力;  $q$  为 Mises 等效应力;  $p'_0$  为初始有效平均应力.

地基土层的有效自重应力为

$$\sigma_{z0} = \gamma' z \tag{4}$$

式中:  $\gamma'$  为有效密度;  $z$  为土层深度.

各方向上的初始主应力为

$$\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = k_p \gamma' z \tag{5}$$

式中:  $k_p$  为侧压力系数.

初始有效平均应力为

$$p'_0 = \frac{\sigma_{x0} + \sigma_{y0} + \sigma_{z0}}{3} = \frac{(2k_p + 1) \gamma' z}{3} \tag{6}$$

初始 Mises 等效应力为

$$q_0 = \sigma_{z0} - \sigma_{x0} = (1 - k_p) \gamma' z \tag{7}$$

将式(6)、(7)带入式(3)可得初始屈服面上的平均有效应力为

$$p'_{0f} = \left( \frac{3(1 - k_p)^2}{M^2(2k_p + 1)} + \frac{(2k_p + 1)}{3} \right) \gamma' z \tag{8}$$

当作用路堤荷载  $\Delta p$  后,按一维压缩得到的主应力为

$$\sigma_z = \gamma' z + \Delta p \tag{9}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = k_p (\gamma' z + \Delta p) \tag{10}$$

有效平均应力为

$$p' = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{(2k_p + 1) (\gamma' z + \Delta p)}{3} \tag{11}$$

Mises 等效应力为

$$q = \sigma_z - \sigma_x = (1 - k_p) (\gamma' z + \Delta p) \tag{12}$$

将式(11)、(12)带入式(3)可得:

$$p'_0 = \left( \frac{3(1 - k_p)^2}{M^2(2k_p + 1)} + \frac{(2k_p + 1)}{3} \right) (\gamma' z + \Delta p) \tag{13}$$

实际上土层从上到下的初始应力状态是不同的,其初始孔隙比也是不同的.一维地基中土体的应力状态并不是等向固结,在图 3 中则显示为土层状态并不是位于初始正常固结线 INCL 上,而是位于各向等压固结曲线  $K_0$  上.根据修正剑桥模型的理论,  $K_0$  固结曲线在  $e - \ln p'$  平面内位于 INCL 与 CSL 之间,并且这 3 条线是平行的(见图 3).然而,在 ABAQUS 软件中,由于修正剑桥模型所采用



的参数是 INCL 的截距  $e_1$ , 而非 CSL 的截距  $e_{cs}$ , 需先将两者按照下式进行转化

$$e_1 = e_{cs} + (\lambda - k) \ln 2.$$

(14)

对于  $K_0$  固结状态土体的孔隙比  $e_0$  为

$$e_0 = e_1 - \lambda \ln(p'_0) + k \ln\left(\frac{p'_0}{p'}\right).$$

(15)

将式 (14) 带入式 (15) 可得:

$$e_0 = e_{cs} - \lambda \ln\left(\frac{p'_0}{2}\right) + k \ln\left(\frac{p'_0}{2p'}\right).$$

(16)

在 ABAQUS 中, 若土体采用 Gravity 荷载类型施加重力荷载, 计算基于总孔压进行, 此时在材料密度为土体干密度为

$$\rho_d = \rho_{sat} - \rho_w \frac{e_0}{1 + e_0}.$$

(17)

式中:  $\rho_{sat}$  为土体的饱和密度;  $\rho_w$  为水的密度. 由于孔隙比随深度是变化的, 则干密度也将随深度发生变化, 且呈非线性变化.

2 修正剑桥模型随机有限元分析

2.1 随机有限元分析流程

基于 Monte Carlo 法基本原理, 并结合随机有限元技术对地基土体修正剑桥模型可靠性进行系统性分析, 相应的随机有限元分析流程如图 4 所示.

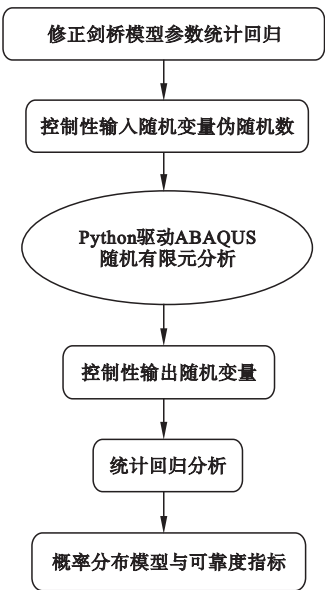


图 4 随机有限元分析流程  
Fig. 4 Process on SFEM

Step1: 对代表性土样三轴试验资料进行统计回归分析, 得出修正剑桥模型主要参数. 对数硬化常数  $\lambda$ 、对数体积回弹模量  $k$  以及  $M$  的概率统计特征值, 确定  $\lambda$  为控制性输入随机变量.

Step2: 在 Step1 中获得参数统计特征值的基础上, 利用 MATLAB 统计工具箱生成一组非关联的概率同分布的伪随机数组. 其中, 每一维随机数代表修正剑桥模型中某一参量并编译成 ABAQUS 可以调用的外部数据文件.

Step3: 利用 Python 脚本驱动主程序, 将 Step2 中含有伪随机数的数据文件导入 ABAQUS 地基土体有限元模型, 并进行随机有限元分析, 输出地基土体在典型应力路径条件下的内力、变形、屈服面代表值等随机变量.

Step4: 利用 MATLAB 统计工具箱, 对 Step3 的输出随机变量进行统计分析, 确定控制性输出随机变量的概率分布模型, 并且计算可靠度指标.

2.2 随机有限元分析

按照图 4 的地基土体修正剑桥模型可靠性随机有限元分析流程, 利用 Python 驱动 ABAQUS 随机有限元分析平台, 得出地基土体在典型荷载条件下内力、位移、属性屈服面等控制性随机变量的样本空间.

为了更好地验证随机有限元分析结果的可信性, 笔者在随机有限元分析中, 选择简单的一维地基固结作为实例, 相应的模型参数为: 地基土体厚度 10 m, 宽 1 m, 有限元分析采用四节点线性应变与孔压耦合单元 (CPE4P), 地基单面排水, 在顶部一次性施加 100 kPa 均布荷载. 对此模型在进行确定性有限元分析时所采用的地基土体物理力学指标如表 1 所示.

表 1 黏性土主要物理力学参数

Table 1 Parameters of soil					
$\lambda$	$k$	$M$	渗透系数 $k_s$ / ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	$e_{cs}$	泊松比
0.5	0.1	1	$1.0 \times 10^{-8}$	3.0	0.3

3 随机有限元结果分析

按照表 1 中的参数进行确定性有限元计

算,得到地基土体的竖向沉降量  $U_2$ 、Mises 应力及孔隙比  $e$  分布(见图 5)。

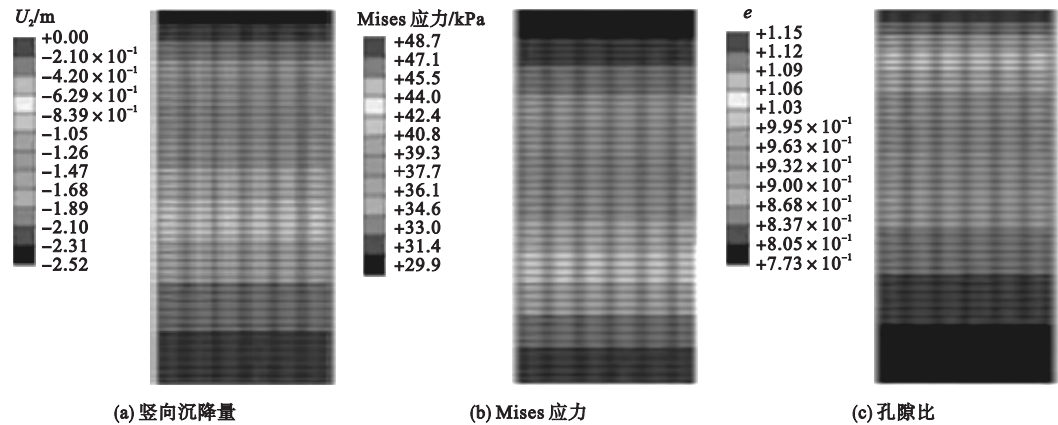


图 5 确定性有限元分析结果

Fig. 5 The deterministic finite element analysis results

从图 5 中可以看出,在 100 kPa 压应力作用下,地基土体内最大 Mises 应力为 48.7 kPa,最大竖向位移为 2.51 m,孔隙比沿深度从 1.15 变化到 0.77。

在利用自行编制的 Python 脚本程序调用地基土体 ABAQUS 力学分析模型进行随机有限元分析的同时,需将修正剑桥模型中控制性随机变量  $\lambda$  的概率同分布伪随机数也带入 ABAQUS 有限元模型中,最终才能实现地基土体的随机有限元分析。

笔者仅选取参数  $\lambda$  为代表,进行单一随机变量下的随机分析。假定参数  $\lambda$  服从数学期望值为 0.5,变异系数分别为 0.08、0.10、0.12 的 Gauss 分布。同时,选择地基土体顶面竖向位移作为随机有限元分析输出的控制性随机变量。对参数  $\lambda$  在 3 组不同  $\delta$  条件下的土体分别进行 1 000 次随机有限元分析,得到了每种条件下竖向位移的概率分布(见图 6)。

从图 6 中可以看出,地基土体顶点竖向位移服从具有极值点的 Generalized Extreme Value - III (GEV - III) 分布,其概率分布函数为

$$F(s, \xi) = \exp(- (1 + \xi s)^{-1/\xi}), \quad (18)$$

$$s = (x - \mu)/\sigma. \quad (19)$$

式中: $s$  为标准化变量; $\xi$  为形状参数; $\mu$  为位置参数; $\sigma$  为尺度参数。

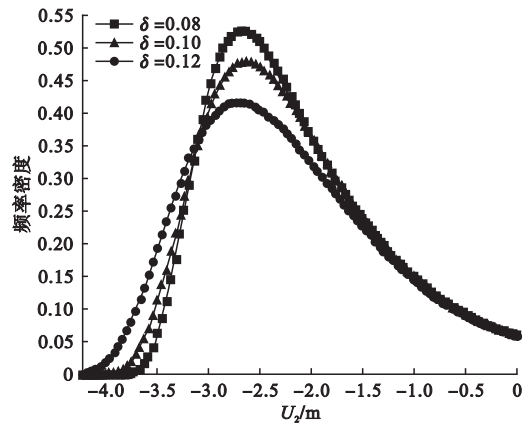


图 6 不同  $\delta$  条件下  $U_2$  的概率分布

Fig. 6 Probability distribution curves of  $U_2$  with different  $\delta$  values

数学期望和方差分别为

$$E(x) = \mu - \frac{\sigma}{\xi} + \frac{\sigma}{\xi} g_1, \quad (20)$$

$$\text{Var}(x) = \frac{\sigma^2}{\xi^2} (g_2 - g_1^2), \quad (21)$$

$$g_n = \Gamma(1 - n\xi), \quad n = 1, 2, 3. \quad (22)$$

式中: $\Gamma(t)$  为伽马函数。

3 组不同  $\delta$  条件下的  $U_2$  概率分布函数 GEV - III 的参数如表 2 所示。

表2  $U_2$  概率分布函数 GEV-III 参数

Table 2 Parameters of  $U_2$  under GEV-III

$\delta$	$\mu$	$\sigma$	$\xi$
0.08	-2.52	0.71	0.13
0.10	-2.46	0.79	-0.03
0.12	-2.58	0.89	0.09

$U_2$  的累计概率密度、相应的可靠度指标如图 7 所示。由图可知:100 kPa 压应力作用时,在  $\delta$  分别等于 0.08、0.1、0.12 的条件下,地基顶面内产生的固结沉降量小于确定性有限元分析产生沉降量  $U_2 = -2.5$  m 的概率值为 60%;然而,对于  $U_2$  小于 -3.5 m 的概率值分别为 99%、97%、95%。因此,基于确定性有限元分析的  $U_2$  仅有 60% 的保证率, $\delta$  的大小对于控制性输出随机变量的可靠性有重要影响。

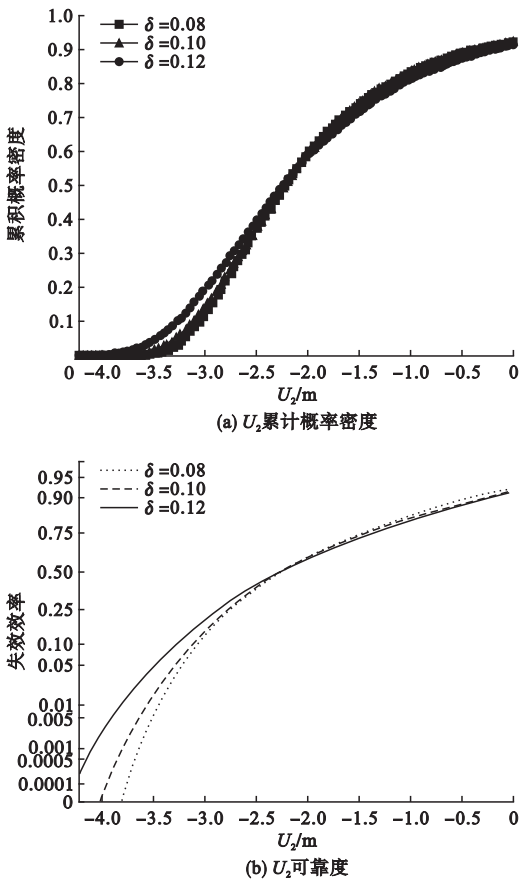


图7 随机有限元分析结果

Fig.7 The stochastic finite element analysis results

4 结 论

- (1)修正剑桥模型能够充分反映土体在多次复杂加、卸荷复杂应力路径下土体固结变形过程,同时也揭示出了模型参数的离散性将引起地基土体宏观沉降的随机性.将模型中的参数 $\lambda$ 作为控制性输入随机变量,且假设其服从 Gauss 分布时,作为控制性输出随机变量的竖向位移不拒绝 GEV-III 分布.
- (2)通过对固结沉降量的统计回归分析表明:在控制性随机变量 $\lambda$ 数学期望值处进行的确定性有限元分析,其结果对于体系仅有 60% 的保证率,远低于工程结构目标可靠度.
- (3)通过不同变异系数 $\delta$ 对  $U_2$  的可靠度影响分析表明:降低变异系数大小对于提高控制性输出随机变量可靠度指标有重要作用,复杂应力路径下本构模型参数的精确性是控制岩土工程可靠度指标的核心要素.

参考文献

[1] BORJA R I, LEE S R. Cam-clay plasticity, part I: implicit integration of elasto-plastic constitutive relations[J]. Computer methods in applied mechanics & engineering, 1990, 78 (1): 49 - 72.

[2] BORJA R I, LIN C, MONTÁNS F J. Cam-clay plasticity, part IV: implicit integration of anisotropic bounding surface model with nonlinear hyper elasticity and ellipsoidal loading function [J]. Computer methods in applied mechanics & engineering, 2001, 190 (26/27): 3293 - 3323.

[3] 袁克阔,陈卫忠,于洪丹,等.考虑黏聚特性和拉压不等效应的修正剑桥模型及数值实现[J].岩石力学与工程学报,2012,31(8):1574 - 1579.

(YUAN Kekuo, CHEN Weizhong, YU Hongdan, et al. Modified cam-clay model considering cohesion and S-D effect and its numerical implementation [J]. Chinese journal of rock mechanics and engineering, 2012, 31 (8): 1574 - 1579.)

[4] KOHLER R, HOFSTETTER G. A cap model for partially saturated soils [J]. International journal for numerical & analytical methods in geomechanics, 2010, 32 (8): 981 - 1004.

[5] 连锁营,韩国城,姚仰平.基于 SMP 准则的改进剑桥模型及其在基坑工程中的应用[J].大

- 连理工大学学报,2002,42(1):93-97.  
(LIAN Zhenying, HAN Guocheng, YAO Yangping. Revised cam-clay model based on SMP criterion and its application to foundation engineering[J]. Journal of Dalian university of technology, 2002, 42(1): 93-97.)
- [6] 范庆来, 栾茂田, 杨庆. 修正剑桥模型的隐式积分算法在 ABAQUS 中的数值实施[J]. 岩土力学, 2008, 29(1): 269-273.  
(FAN Qinglai, LUAN Maotian, YANG Qing. Numerical implementation of implicit integration algorithm for modified cam-clay model in ABAQUS[J]. Rock and soil mechanics, 2008, 29(1): 269-273.)
- [7] 范庆来, 栾茂田, 倪宏革. 循环荷载作用下软基上大圆筒结构弹塑性有效应力分析[J]. 水利学报, 2008, 39(7): 836-842.  
(FAN Qinglai, LUAN Maotian, NI Hongge. Elastoplastic effective stress analysis of soft soil foundation of large-diameter cylindrical structure subjected to cyclic loading[J]. Journal of hydraulic engineering, 2008, 39(7): 836-842.)
- [8] 关云飞, 高峰, 赵维炳, 等. ANSYS 软件中修正剑桥模型的二次开发[J]. 岩土力学, 2010, 31(3): 976-980.  
(GUAN Yunfei, GAO Feng, ZHAO Weibing, et al. Secondary development of modified cam-bridge model in ANSYS software[J]. Rock and soil mechanics, 2010, 31(3): 976-980.)
- [9] 陈善雄, 李剑, 姜领发, 等. 基于双曲线临界状态的改进剑桥模型及数值实现[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(11): 2325-2333.  
(CHEN Shanxiong, LI Jian, JIANG Lingfa, et al. Improve cam-clay model based on hyperbolic critical state and its numerical implementation[J]. Chinese journal of rock mechanics and engineering, 2013, 32(11): 2325-2333.)
- [10] 姚仰平, 冯兴, 黄祥, 等. UH 模型在有限元分析中的应用[J]. 岩土力学, 2010, 31(1): 237-245.  
(YAO Yangping, FENG Xing, HUANG Xiang, et al. Application of UH model to finite element analysis[J]. Rock and soil mechanics, 2010, 31(1): 237-245.)
- [11] 姚仰平, 侯伟. 土的基本力学特性及其弹塑性描述[J]. 岩土力学, 2009, 30(10): 2881-2901.  
(YAO Yangping, HOU Wei. Basic mechanical behavior of soils and their elastoplastic modeling[J]. Rock and soil mechanics, 2009, 30(10): 2881-2901.)
- [12] RAO P, CHEN Q, LI L, et al. An elastoplastic solution for spherical cavity expansion in modified cam-clay soil under drained condition[J]. International journal of geomechanics, 2017, 17(8).
- [13] 孙德安, 姚仰平, 殷宗泽. 初始应力各向异性土的弹塑性模型[J]. 岩土力学, 2000, 21(3): 222-226.  
(SUN Dean, YAO Yangping, YIN Zongze. An elastoplastic model for soil with initially stress-induced anisotropy[J]. Rock and soil mechanics, 2000, 21(3): 222-226.)
- [14] LIU M D, CARTER J P. A structured cam clay model[J]. Revue canadienne de geotechnique, 2002, 39(6): 1313-1332.
- [15] 黄雨, 周子舟. 下负荷面剑桥模型在 ABAQUS 中的开发实现[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(1): 115-119.  
(HUANG Yu, ZHOU Zizhou. Numerical implementation for subloading cam-clay model in ABAQUS[J]. Chinese journal of geotechnical engineering, 2010, 32(1): 115-119.)
- [16] 沈恺伦, 王立忠. 天然软黏土屈服面及流动法则试验研究[J]. 土木工程学报, 2009, 42(4): 119-127.  
(SHEN Kailun, WANG Lizhong. Experimental study on the yield surface and flow rule of natural clays[J]. China civil engineering journal, 2009, 42(4): 119-127.)
- [17] 谢定义, 齐吉琳, 张振中. 考虑土结构性的本构关系[J]. 土木工程学报, 2000, 33(4): 35-41.  
(XIE Dingyi, QI Jilin, ZHANG Zhenzhong. A constitutive law considering soil structural properties[J]. China civil engineering journal, 2000, 33(4): 35-41.)
- [18] 王保田, 汪莹鹤, 李守德. 基于 LSSVM 与 MCS 的路基沉降可靠度分析[J]. 岩土力学, 2009, 30(2): 357-361.  
(WANG Baotian, WANG Yinghe, LI Shoude. Reliability analysis of soft foundations settlement based on LSSVM and MCS[J]. Rock and soil mechanics, 2009, 30(2): 357-361.)
- [19] 刘宁, 郭志川, 罗伯明. 地基沉降的概率分析方法和可靠度计算[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(2): 143-150.  
(LIU Ning, GUO Zhichuan, LUO Boming. Probabilistic analysis and reliability assessment for foundation settlement[J]. Chinese journal of geotechnical engineering, 2000, 22(2): 143-150.)
- [20] ROSCOE K H, SCHOFIELD A N, THURAIRAJAH A. Yielding of clays in states wetter than critical[J]. Geotechnique, 2015, 13(3): 211-240.
- [21] ROSCOE K H. On the generalized stress-strain behavior of wet clay[J]. Engineering plasticity, 1968: 535-609.