

基于累积法的 GM(1,1) 模型在桥梁施工 监控上的应用

包龙生,周子博,于 玲

(沈阳建筑大学交通工程学院,辽宁 沈阳 110168)

摘 要 目的 研究桥梁施工监控过程中预测标高的方法,并对现有的理论模型进行改进,提高预测精度,弥补现有预测模型的不足. 方法 将累积法计算通式结合到灰色理论模型的参数估计中进行改进,从而得到一种新的理论模型来对桥梁施工进行标高预测,并以疏港大桥为工程背景进行实例应用,检验模型预测效果. 结果 在对疏港大桥标高预测中,传统 GM(1,1) 模型预测的相对误差平均值为 0.044%,经改进后基于累积法的 GM(1,1) 模型预测的相对误差平均值为 0.033%. 结论 基于累积法的改进后的预测模型一定程度上解决了现有模型的问题,在桥梁施工监控中的线性误差分析过程中具有更好的应用效果.

关键词 桥梁施工监控;线形预测;灰色理论;累积法

中图分类号 TU997;U488.27

文献标志码 A

Application on GM (1,1) Model Based on Cumulative Method in Bridge Construction Monitoring

BAO Longsheng, ZHOU Zibo, YU Ling

(School of Transportation Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang, China, 110168)

Abstract: To study the theoretical method of predicting height in the process of bridge construction monitoring, and improve the existing theoretical model to improve the prediction accuracy, the shortcomings of the existing prediction models were studied, and the cumulative method was applied to improve the parameter estimation of the grey theory model, so as to get a new theoretical model to predict the bridge construction elevation. Taking the port bridge as the project background application, test the forecast model. The results showed that in the prediction of the bridge elevation, the traditional GM (1,1) model to predict the average relative error is 0.044%, the improved method based on cumulative GM (1,1) model to predict the average relative error is 0.033%. The improved prediction model based on cumulative method solves the problem of existing models to a certain extent, and has better application effect in the linear error analysis of bridge construction monitoring.

收稿日期:2017-03-12

基金项目:国家自然科学基金项目(51478276)

作者简介:包龙生(1971—),男,教授,博士,主要从事桥梁及道路工程方面研究.

Key words: bridge construction monitoring; alignment prediction; grey theory; cumulative method

随着我国经济的快速发展,公路、桥梁作为交通枢纽的建设也随之崛起。在现代桥梁建设中,预应力混凝土连续梁桥作为最重要、最广泛应用的结构之一,如何更好地保证其施工质量成为了该领域的研究热点。预应力混凝土连续梁桥具有良好的结构刚度和抗震性能,而且具有整体性能好,伸缩缝少等优点^[1-2]。挂篮悬臂浇筑施工法是连续梁桥最常用的施工方法,分段施工,每个节段由移动挂篮,浇筑混凝土,张拉钢绞线等工况组成^[3],因此只有对每个节段进行施工监测和控制,才能保证桥梁施工的顺利完工。

在连续梁桥的施工监控的过程中主要为了实现三个目标:一是桥梁最终的几何形状满足设计要求;二是桥梁的内力状态满足设计要求;三是保证桥梁在施工的过程中的各类参数能够被实时掌握,保证施工安全。施工现场影响因素繁多,混凝土收缩徐变、环境温度湿度的变化、梁体上放置的物件重量、梁体内部与外部的温度差等多项因素都会导致梁体竖向位移的变化^[4-5]。要想实现对桥梁线形的最优控制就要寻找出有效的理论方法来发现其内在的规律,从而预测未来的发展变化。建立误差分析模型对误差进行分析判断在各类工程中必不可少的一部分。国内外对于模型的研究和探索也在不断地进行:在单一预测模型的应用方面,夏文龙^[6]在研究中介绍了建立了灰色预测模型,并在路基沉降、桥梁桩基沉降和悬臂梁体变形方面实现了较为合理的预测;王正新^[7]在对灰色理论优化方法进行研究时介绍了一种加权的修正双曲线法,采用改进的修正双曲线法预测,提高了预测精度。在组合预测模型的应用方面同样有着很高的关注度,并且在对模型理论进行不断完善的过程中,大量研究证明组合模型要好于单一模型^[8-9]。例如自回归求和滑动平均 (ARIMA) 与人工神经网络组合模型、贝

叶斯与神经网络的组合模型的预测;变权组合预测模型与加权组合模型的预测^[9];延时神经网络的基础上提出的 BP 神经网络组合模型在桥梁施工中的预测。

可见,在工程的误差分析预测中已经发展了一些较为成熟的预测模型,尤其是组合模型的运用表明了模型的建立不应该只局限于单一模型,要在理论上更加灵活的运用,取长补短,增强模型的适应能力^[10-11]。目前,在悬臂浇筑法桥梁标高预测中以 GM(1,1) 模型最为常用,但是在陆续的研究中发现 GM(1,1) 模型存在一定的病态性^[12-13]。近几年,在模型的建立过程中有一种新的曲线拟合技术——累积法出现在人们的视线,将其运用在灰色理论模型结构参数的估算中,成为一套完整的估算方法体系^[13]。基于此,笔者通过将累积法与 GM(1,1) 模型相结合,在不影响模型发展系数和高精度的前提下将白化响应式替换成内涵性预测公式,很大程度上增加了模型的平滑性,一定程度上解决了传统模型出现的病态性问题。同时将改进后的预测模型应用到疏港大桥的标高预测中,并对其应用效果进行评估,对未来桥梁施工标高预测具有一定的理论和现实意义。

1 工程背景

疏港大桥位于东港市南部,跨越西南航道,全长 991 m,该桥左右分幅。疏港大桥第五联为 3 跨预应力混凝土悬臂浇筑连续梁桥(见图 1),跨径布置为 (49+80+49) m,主桥为变高度单箱单室连续箱梁。疏港大桥采用正装计算法确定桥梁施工阶段理想状态,按桥梁施工安装的顺序,分阶段分步骤模拟计算结构的实际形成过程,以确定施工各阶段结构的内力状态和线形。施工监控采取理论计算预测→按预测进行节段悬臂施工作业→节段施工作业完成后实测应力和线形数据反

馈→根据实测反馈进行参数分析、识别及优化→进行下一施工阶段理论计算预测的循环次序进行,其主要工作内容包括阶段施工前

的预测计算、节段悬臂施工过程中的控制测量、实测结果与计算预测结果的偏差分析及优化分析。

展开立面

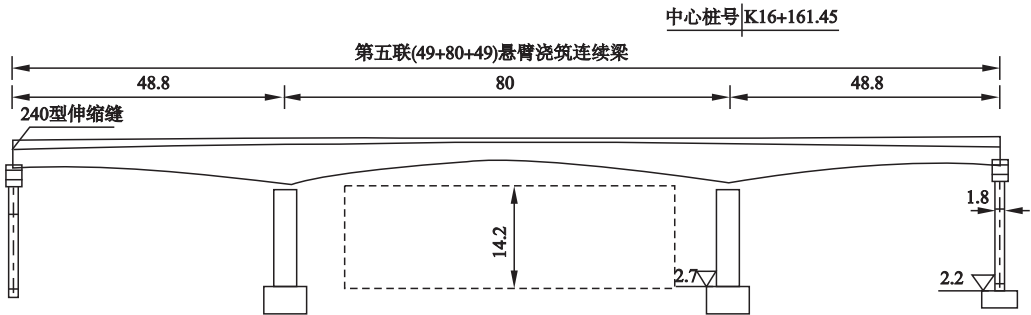


图1 桥梁立面图

Fig. 1 Bridge elevation

2 灰色理论模型研究

2.1 灰色模型简介

灰色系统理论是一种用来解决不确定性信息的数学方法,适用于初始数据较少,信息贫乏问题的分析,并广泛应用于工业、交通、经济等领域。灰色系统主要对不确定性系统进行研究^[14],其特点主要有:①模型可以在样本信息少的情况下发挥作用;②新的信息相对于旧信息在系统分析过程中更有效;③建模同时包括文字描述和数学分析;④信息为动态性信息。因此灰色理论模型是一个不断对数据进行分析,调整,优化的过程,并利用模型生成的新的数据信息再次导入模型分析^[15]。

2.2 GM(1,1)建模

创建 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ 为非负原始数列,然后进行一次累加计算,生成 $X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$, 其中, $x^{(1)}(i) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(j), i = 1, 2, \dots, n$. 对 $X^{(1)}$ 进行紧邻均值生成,得到 $Z^{(0)} = (z^{(0)}(2), z^{(0)}(3), \dots, z^{(0)}(n))$. (1)

其中,

$$z^{(0)}(i) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(i-1) + x^{(1)}(i)). \quad (2)$$

建立白化微分方程:

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + ax_1^{(1)} = b. \quad (3)$$

根据最小二乘法得出: $\lambda = [a, b]^T = (B^TB)^{-1}B^TY_N$, 其中

$$B = \begin{bmatrix} -1/2[x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)] & x_2^{(1)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(2) \\ -1/2[x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3)] & x_2^{(1)}(3) & \cdots & x_N^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1/2[x^{(1)}(n-1) + x^{(1)}(n)] & x_2^{(1)}(n) & \cdots & x_N^{(1)}(n) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$Y_N = \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-a(i-1)} + \frac{b}{a}, i = 2, 3, \dots, n. \quad (5)$$

将求得的参数带入白化微分方程中得出

$$\hat{x}^{(1)}(i) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-a(i-1)} + \frac{b}{a}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (6)$$

$$\hat{x}^{(0)}(i) = \hat{x}^{(1)}(i) - \hat{x}^{(1)}(i-1) = (1 - e^a) \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-a(i-1)}, i = 2, 3, \dots, n. \quad (7)$$

计算出模拟值以后,再次带入模型直至符合精度。

2.3 GM(1,1)的应用缺陷

对于GM(1,1)模型的应用比较广泛,多数情况下具有较好的应用效果,不过依旧存在一定的应用缺陷. 目前,在桥施工监控领域用来分析数据判断误差所使用的传统灰色理论模型都是以最小二乘法作为参数估计的方法. 经研究发现,最小二乘法存在一定的缺陷^[16-17],根本原因在于GM(1,1)模型中对于白化响应式只是借用而已,实际上白化模型并不在灰色模型的类别之中,很大程度影响了模型的稳定性^[18]. 因此,在对样本数据较少并存在异常点时,其正规方程会出现病态性,从而导致平均误差较大等问题. 因此,如何在传统灰色理论模型的基础上加以改进,增加预测精度,减少缺陷才是研究重点.

3 GM(1,1)模型的改进及累积法的应用

3.1 累积法

累积法作为一种曲线拟合技术,其原理为累加生成. 累积法是直接对样本数据进行累加,不需要进行拟合误差的假设,该方法减小了观测数据中的异常点所带来的影响,增加了预测模型的稳定性. 累积法与GM(1,1)模型相结合之后,在不影响模型发展系数和高精度的前提下将白化响应式替换成内涵性预测公式,增加了模型的平滑性^[19].

3.2 基于累积法的GM(1,1)模型的建立

累积法GM(1,1)模型的创建过程主要分为4个步骤:①创建非负原始序列,进行一次累加,再计算背景值序列;②计算模型的参数估计值;③将上述求得的参数估计值代入预测公式,求得预测值;④计算实际数据与模型求得的预测数据的相对误差值,观测模型预测效果^[20]. 具体操作如下.

累积法GM(1,1)模型进行参数估计中首先创建非负序列 $x^{(0)}(i) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(j)$,

$i = 1, 2, \dots, n$, 经过一次累加得

$$x^{(0)}(i) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(j), i = 1, 2, \dots, n. \tag{8}$$

在区间 $[i-1, i]$ 上取均值作为背景值, 即

$$x^{(1)}(i) = 0.5(x^{(1)}(i-1) + x^{(1)}(i)), i = 2, 3, \dots, n. \tag{9}$$

GM(1,1)模型的定义型方程为

$$x^{(0)}(i) + az^{(1)}(i) = b, i = 2, 3, \dots, n. \tag{10}$$

模型参数有两个,因此进行1阶,2阶累积和算子:

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(i) = b \sum_{i=2}^n {}^{(1)}, \tag{11}$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(i) = b \sum_{i=2}^n {}^{(2)}. \tag{12}$$

其中,

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(i) = \sum_{i=2}^n z^{(1)}(i), \tag{13}$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(i) = \sum_{i=2}^n (n-i+1)z^{(1)}(i), \tag{14}$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(i) = \sum_{i=2}^n x^{(0)}(i), \tag{15}$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(i) = \sum_{i=2}^n (n-i+1)x^{(0)}(i), \tag{16}$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)} = C_n^1 - 1 = n - 1, \tag{17}$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(2)} = C_{n+2-1}^2 - n = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{18}$$

如果记 $a = (a, b)^T$,

$$X_r = \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(i) & - \sum_{i=2}^n {}^{(1)} \\ \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(i) & - \sum_{i=2}^n {}^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$Y_r = \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(i) \\ -\sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(i) \end{pmatrix}.$$

则累计和算子可以写成 $X_r a = Y_r$, 运用累积法的参数估计公式为

$$a = (a, b)^T = X_r^{-1} Y_r. \tag{19}$$

进一步计算后得到两个参数估计式:

$$a = \frac{\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(i) - (n-1) \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(i)}{|X_r|}, \tag{20}$$

$$b = \frac{\sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(i) \sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(i) - \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(i) \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(i)}{|X_r|}. \tag{21}$$

其中,

$$|X_r| = -\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(i) + (n-1) \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(i). \tag{22}$$

到参数估计之后开始推导模型的内涵型预测公式. GM(1,1)模型的定义方程为

$$x^{(0)}(i) + az^{(1)}(i) = b, i=2,3,\cdots,n. \tag{23}$$

等价于

$$x^{(0)}(i) = \frac{2(2-a)^{i-2}(b-ax^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}}. \tag{24}$$

由于 $z^{(1)}(i) = 0.5(x^{(1)}(i) + x^{(1)}(i -$

$1))$, 所以 GM(1,1)模型的定义方程为

$$x^{(0)}(i) + \frac{a}{2}(x^{(1)}(i) + x^{(1)}(i-1)) = b. \tag{25}$$

由 $x^{(1)}(i) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(j) = x^{(1)}(i-1) + x^{(0)}(i)$ 得:

$$x^{(0)}(i) + \frac{a}{2}(x^{(0)}(i) + 2x^{(1)}(i-1)) = b. \tag{26}$$

$$x^{(0)}(i) = \frac{b - ax^{(1)}(i-1)}{1 + 0.5a} = \frac{b - a(x^{(0)}(i-1) + x^{(1)}(i-2))}{1 + 0.5a} = \frac{2(2-a)^{i-2}(b - ax^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}}. \tag{27}$$

即由 $x^{(0)}(1)$ 作为初始条件, 使用下列公式(预测公式)来预测 $\hat{x}^{(0)}(i)$ 的值,

$$\hat{x}^{(0)}(i) = \frac{2(2-a)^{i-2}(b - ax^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}}. \tag{28}$$

最终通过计算实际测量数据与预测数据的相对误差来判断预测模型的准确性.

4 基于累积法的 GM(1,1)模型的应用

笔者以疏港大桥为例, 在大桥的线性控制中, 纵桥向每施工节段设一测试截面, 截面布置在该施工节段距前端 10 cm 处, 每个测试截面布置六个测点(见图 2). 在有限元模型分析过程中, 以梁底中间点作为计算参照, 通过梁体截面参数来确定其他 5 个点的标高.

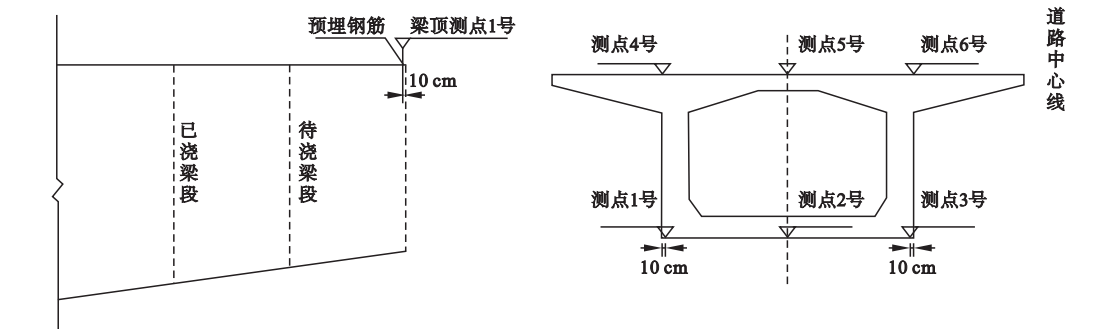


图2 主梁位移测点布置图

Fig.2 Map of main beam displacement

要想达到结构的最终成型必须对每一个施工节段进行挠度计算分析,本工程以正装(前进)分析法作为结构计算方法.建立 MI-DAS 有限元模型(见图3).正装(前进)分析法得出的预拱度为实现最终的桥梁线性打好了基础,然后进行数据误差分析阶段.

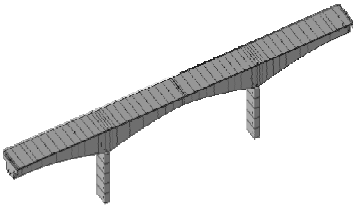


图3 大桥有限元模型

Fig.3 Finite element model of bridge

在分析过程中,以张拉后的实际测量标高数据与有限元模型计算得到的标高数据的比值作为原始样本数据,通过预测模型来计算预测得出下一个施工梁段的修正比例.笔者以疏港大桥右幅11号墩1~5号节段的实际测量值与计算值得比值为原始数据分别使用GM(1,1)模型(建模过程见2.2节)和改进后的基于累积法的灰色理论预测模型对6号节段标高进行预测,重复以上步骤得到6~11号节段标高.与实际值相比较,以此为例判断两种预测模型的预测效果.预测结果如表1、表2所示.

表1 小桩号模型预测结果

Table 1 Prediction results of small pile

| 断面 编号 | 梁底中点 实测标高 Z/m | GM(1,1) 模型预测标高 Z ₁ /m | 改进后模 型预测标高 Z ₂ /m | GM(1,1)模型 预测误差 ε ₁ /mm | 改进后模型 预测误差 ε ₂ /mm | GM(1,1) 模型相对误差 $\frac{\varepsilon_1}{Z_1}/\%$ | 改进后模型相 对误差 $\frac{\varepsilon_2}{Z_2}/\%$ |
|----------|---------------------|--|------------------------------------|---|-------------------------------------|---|--|
| 6 | 18.479 | 18.503 | 18.495 | -24 | -16 | 0.130 | 0.087 |
| 7 | 18.703 | 18.692 | 18.696 | 11 | 7 | 0.058 | 0.037 |
| 8 | 18.850 | 18.843 | 18.842 | 7 | 8 | 0.037 | 0.037 |
| 9 | 18.962 | 18.952 | 18.956 | 10 | 4 | 0.053 | 0.021 |
| 10 | 19.014 | 19.008 | 19.006 | 6 | 8 | 0.032 | 0.042 |
| 11 | 19.022 | 19.007 | 19.015 | 15 | 7 | 0.079 | 0.038 |

表2 大桩号模型预测结果

Table 2 Prediction results of big pile

| 断面编号 | Z/m | Z ₁ /m | Z ₂ /m | ε ₁ /mm | ε ₂ /mm | $\frac{\varepsilon_1}{Z_1}/\%$ | $\frac{\varepsilon_2}{Z_2}/\%$ |
|------|--------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 6 | 18.810 | 18.812 | 18.808 | -2 | 2 | 0.011 | 0.011 |
| 7 | 19.050 | 19.052 | 19.051 | -2 | -1 | 0.010 | 0.005 |
| 8 | 19.249 | 19.255 | 19.253 | -6 | 4 | 0.031 | 0.021 |
| 9 | 19.411 | 19.417 | 19.419 | -6 | -8 | 0.031 | 0.041 |
| 10 | 19.524 | 19.526 | 19.523 | -2 | 1 | 0.010 | 0.005 |
| 11 | 19.594 | 19.578 | 19.583 | 16 | 11 | 0.082 | 0.056 |

通过对11号墩右幅大小桩号6~11号节段的梁底标高预测结果得知,GM(1,1)模型在桥梁监控标高预测的应用中具有良好的精度,相对误差平均值为0.044%,但经过笔者改进后的基于累积法的预测模型的误差更

低,相对误差平均值为0.033%.误差曲线对比如图4、图5所示,改进后的模型预测标高误差与实际值相比能够实现更好的拟合,说明结合了累积法的灰色理论模型在预测标高的改进是有效的.

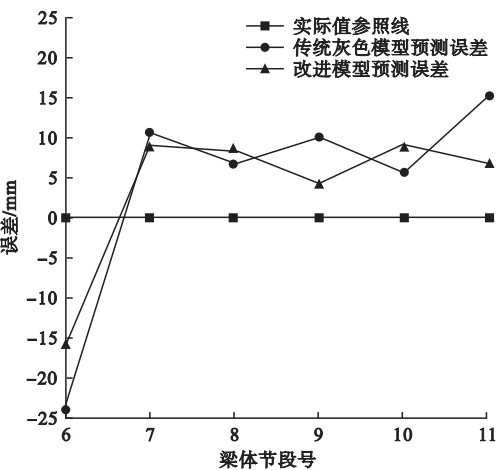


图4 小桩号误差曲线对比

Fig. 4 Error comparison diagram of small pile number

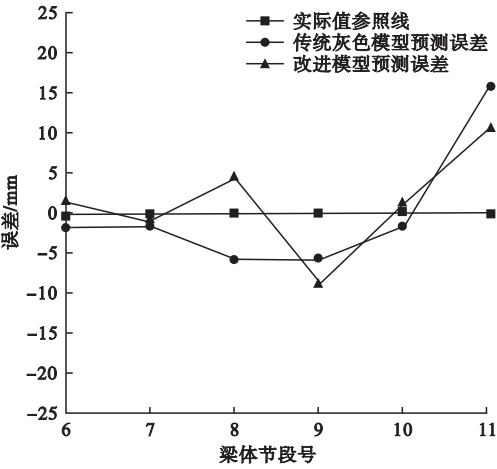


图5 大桩号误差曲线对比

Fig. 5 Error comparison diagram of big pile number

5 结 论

(1) 基于累积法的灰色理论模型的矩阵表达式中将参数估计与原始序列的关系表达出来. 在原始数列进行数乘变换之后,灰作用量的估计会出现一致的数乘变换,不会对发展系数产生影响. 由于这些特性使得改进后的基于累积法的预测模型的病态性减小,更利于实际应用.

(2) 笔者在 GM(1,1)模型的参数估计中引入了累积法,通过模型的定义型方程求出新的预测公式,并在疏港大桥标高预测的应用中取得了相较于传统 GM(1,1)模型更

好的预测效果. 通过相对误差检验法的检验得知,经改进后,预测标高相对误差的平均值由 0.044% 优化为 0.033%,优化效果提升较为显著,有效地提高了模型的预测精度.

参考文献

[1] 黄中磊. 大跨径预应力混凝土连续梁桥的施工监控研究[D]. 长春: 吉林大学, 2013. (HUANG Zhonglei. Research on construction control of long span prestressed concrete continuous girder bridges[D]. Changchun: Jilin University, 2013.)

[2] 桂许兰. 公路桥梁施工状态误差分析及其标准研究[D]. 重庆: 重庆交通大学, 2014. (GUI Xulan. Error analysis and standard research for construction status of highway bridges[D]. Chongqing: Chongqing Jiaotong University, 2014.)

[3] 冯冠杰. 预应力混凝土连续梁桥的施工监控[D]. 郑州: 郑州大学, 2013. (FENG Guanjie. Construction control for prestressed concrete continuous bridge[D]. Zhengzhou: Zhengzhou University, 2013.)

[4] 宋士新. 大跨度连续刚构桥梁施工控制关键问题分析与研究[D]. 广州: 华南理工大学, 2012. (SONG Shixin. Analysis and research of the key problem of the large span continual rigid frame bridge construction control[D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2012.)

[5] 杨渊. 悬臂浇筑法施工监控研究及其相关因素分析[D]. 合肥: 合肥工业大学, 2015. (YANG Yuan. Research of the construction control cantilever casting method and its associated factors[D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2015.)

[6] 夏文龙. 桥梁施工监控与灰色系统理论的应用问题研究[D]. 长沙: 中南大学, 2012. (XIA Wenlong. Analysis on the application of bridge construction monitoring and gray system theory[D]. Changsha: Central South University, 2012.)

[7] 王正新. 含可变参数的缓冲算子与 GM(1,1) 幂模型研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2010. (WANG Zhengxin. Research on the buffer operators with parameters and GM(1,1) power model[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010.)

- [8] 杨剑锋. 同江峪斜拉桥施工监控分析与研究[D]. 大连:大连理工大学,2015.
(YANG Jianfeng. Analysis and research of Tongjiangyu cable-stayed bridge construction control[D]. Dalian:Dalian University of Technology,2015.)
- [9] 王超. 基于灰色理论的电力负荷预测研究[D]. 济南:山东大学,2016.
(WANG Chao. Research on power load forecasting based on grey system theory[D]. Jinan:Shandong University,2016.)
- [10] 张书豪. 基于改进灰色神经网络的污染物排放量预测建模及实现[D]. 成都:电子科技大学,2013.
(ZHANG Shuhao. The prediction of pollutants' emissions modeling and implementation based on improved gray neural network[D]. Chengdu:University of Electronic Science and Technology of China,2013.)
- [11] LIU S, ZENG B, LIU J, et al. Several basic models of GM(1,1) and their applicable bound[J]. System engineering and electronics,2014, 36(3):501-508.
- [12] WU L, LIU S F, FANG Z G, et al. Properties of the GM(1,1) with fractional order accumulation[J]. Applied mathematical computation, 2015,252:287-293.
- [13] YU J, ZHANG X, XIONG C. A methodology for evaluating micro-surfacing treatment on asphalt pavement based on grey system models and grey rational degree theory[J]. Construction & building materials, 2017, 150: 214-226.
- [14] 何康,刘世忠. 基于灰色理论连续梁桥施工监控的研究[J]. 兰州工业学院学报,2014,21(1):30-33.
(HE Kang, LIU Shizhong. Study on construction monitoring of continuous beam bridge based on grey theory[J]. Journal of Lanzhou higher polytechnical college, 2014, 21(1): 30-33.)
- [15] 赵伟刚. 基于数据预处理和 K -均值聚类的支持向量回归预测模型[D]. 兰州:兰州大学,2012.
(ZHAO Weigang. Data preprocessing and K -means clustering based support vector regression model[D]. Lanzhou:Lanzhou University, 2012.)
- [16] 贾得海,曾建初. 灰色系统理论 GM(1,1) 预测模型的应用[J]. 昆明理工大学学报(自然科学版),2013(6):115-120.
(JIA Dehai, ZENG Jianchu. Application of GM(1,1) prediction model based on grey system theory[J]. Journal of Kunming university of science and technology(natural science edition),2013(6):115-120.)
- [17] 曾祥艳. 灰色预测 GM(1,1) 模型的几种拓广模型研究[D]. 成都:电子科技大学,2016.
(ZENG Xiangyan. Study on several kinds of developed models of GM(1,1)[D]. Chengdu:University of Electronic Science and Technology of China,2016.)
- [18] 王富麒. 改进 BP 算法的灰色神经网络模型在高铁沉降预测中的应用研究[D]. 南昌:江西理工大学,2013.
(WANG Fuqi. Application of grey neural network model based on improved BP algorithm in prediction of settlement of high speed railway[D]. Nanchang :Jiangxi University of Science and Technology,2013.)
- [19] 赵子衡. 区间不确定性优化的若干高效算法研究及应用[D]. 长沙:湖南大学,2012.
(ZHAO Ziheng. Research on efficient algorithms of interval-based optimization under uncertainty and its applications [D]. Changsha: Hunan University,2012.)
- [20] ZHANG F, CHEN W. Application of grey LS-SVM in mid and long term power load forecasting [C]. Proceedings of International Conference on Management and Service Science, IEEE,2009:1-4.