

# 不规则凸域板材中单一尺寸矩形排样算法

袁哲,邓长亮,张岩

(沈阳建筑大学机械工程学院,辽宁 沈阳 110168)

**摘要** 目的 研究在不规则凸域板材中进行单一尺寸矩形排样算法,解决在不规则凸域板材中排样单一尺寸矩形工程板数量最大化的问题.方法 首先针对凸域板材中任意两点连线必在凸域板材内的特点,通过数学方程描述矩形工程板在凸域板材内和相互不重叠的约束条件,并以矩形工程板面积之和与凸域板材面积之比最大为目标函数,建立凸域板材中单一尺寸矩形排样算法的数学模型,然后利用启发式搜索算法,求解数学模型,最后得到最优的排样方案.结果 矩形工程板面积之和与凸域板材面积之比可以达到83.3%~93.3%,有效地提高了不规则凸域板材的利用率.结论 通过在多种不规则凸域板材中进行单一尺寸矩形排样实例可见,笔者建立的模型和求解方法可有效地求解不规则凸域板材中单一尺寸矩形的排样问题.

**关键词** 不规则;凸域板材;矩形工程板;排样;启发式搜索算法

中图分类号 TU56<sup>+</sup>4.2;TP18

文献标志码 A

## Study on Algorithm of Single Size Rectangular Layout in Irregular Convex Plates

YUAN Zhe, DENG Changliang, ZHANG Yan

(School of Mechanical Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang, China, 110168)

**Abstract:** A single-size rectangular layout algorithm is studied in the irregular convex plate to solve the problem of maximizing the number of single-size rectangle plate in irregular convex plate. First, for the two characteristics of the two points in convex plate must be in convex plate, the mathematical equations are used to describe the constraints of the rectangle plate in the convex plate and without overlapping with each other. And the mathematical model of the single-size rectangular layout algorithm in the convex plate is established by using the ratio of the sum of the rectangular plate area and the convex plate area as the objective function. Then the heuristic search is used to solve the mathematical model. Finally, the optimal layout scheme is obtained. The ratio of the sum of the rectangular plate area and the convex plate area can reach 83.3%~93.3%, which effectively improves the utilization rate of the irregular convex plate. It can be seen that the model and the solution method can be used to solve the problem of single size rectangle layout effectively

收稿日期:2017-04-24

基金项目:国家自然科学基金项目(51575365);高档石材国家与地方重点实验室开放基金项目(SJSC-2015-C)

作者简介:袁哲(1977—),男,副教授,博士,主要从事优化方法和可靠性理论等方面研究.

by the single-size rectangular layout example in a variety of irregular convex plate.

**Key words:** irregular; convex plate; rectangle plate; layout; heuristic search

不规则石板的优化排样技术是影响石材机床加工效率、自动化程度和出材率的重要因素,已经得到国际上许多国家的重视和研究<sup>[1]</sup>.在不规则凸域板材中进行单一尺寸矩形排样优化问题在实际中应用广泛,且在板材切割生产中占有重要的地位<sup>[2]</sup>.其中一个最普遍和最关键的问题就是如何在不规则凸域板材中排样出尽可能多的矩形工程板,以达到提高板材利用率的目的<sup>[3]</sup>.

国内外对不规则板材内的矩形优化排样问题进行了大量研究.郭瑞峰等<sup>[4]</sup>提出了一种改进 NFP 的滑动轨迹求解算法,对临界多边形的生成过程进行了描述,为解决不规则图形排样问题提供了参考;顾振华等<sup>[5]</sup>采用轨迹线算法、自适应最低重心规则和遗传算法,解决了不规则图形的计算机辅助排料问题,提高了运算速度和排样效果;刘胡瑶等<sup>[6]</sup>针对目前二维不规则形状排样中的 NFP 计算、工程板放置规则及排样顺序问题,分别提出了对应的解决方案,提出的算法适用于二维不规则形状的排样问题.上述学者都是基于几何算法进行研究,并未建立具体的数学模型,不利于进行后续算法的扩展. J. Bennell 等<sup>[7]</sup>用数学方程式表示出了简单不规则图形,并对不规则图形之间的嵌入式排样问题进行了研究,但是只给出了两个不规则图形的包络 pfi - function 的定义,暂时无法扩展到多个图形.

基于上述问题,笔者针对不规则凸域板材中任意两点连线必在凸域板材内的特点,通过数学方程描述矩形工程板在不规则凸域板材内部和相互不重叠的约束条件,并以矩形工程板面积之和与不规则凸域板材面积之比最大为目标函数,建立不规则凸域板材中单一尺寸矩形排样算法的数学模型,然后利用启发式搜索算法,求解数学模型,最后得到

最优的排样方案.

## 1 数学模型的建立

二维不规则图形内的矩形排样问题始终需要满足以下两个条件<sup>[8]</sup>:

- (1) 所排入的矩形工程板之间不能重叠;
- (2) 所排入的矩形工程板必须在不规则凸域(容器)内部.

基于板材的边界坐标,根据这两个约束条件构建在不规则凸域板材中进行单一尺寸矩形排样的数学模型.

### 1.1 不规则凸域板材的数学表示

采用几何图形表示法来表示凸形板材和矩形工程板.考虑到凸形板材的不规则性,使用折线段来表示不规则板材,即用凸多边形建立凸域来表达.对于不规则石材大板,假设不规则板材有  $N$  条边,有  $N$  个顶点,对于组成不规则板材的第  $i$  条边,利用折线上的顶点坐标得到该折线方程  $g_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . 因此,不规则板材  $\Omega$  的内部区域可以表示为

$$\Omega = \{x \in R^2 | g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, N\}. \quad (1)$$

### 1.2 矩形工程板的不重叠条件

假设所排的矩形工程板两边平行于笛卡尔坐标系<sup>[9]</sup>的坐标轴并且不旋转.设矩形工程板  $m$  个,对于第  $i$  个矩形工程板,  $i = 1, 2, \dots, m$ , 设其中心点坐标为  $C^i = (C_x^i, C_y^i)$ , 平行于  $x$  轴与  $y$  轴的边长分别为  $a$  和  $b$  (因为是同尺寸矩形,矩形工程板尺寸不因编号的变化而变化<sup>[10]</sup>), 矩形工程板  $i$  的四个顶点为  $V_1^i, V_2^i, V_3^i, V_4^i$ , 因此顶点坐标为

$$\begin{cases} V_1^i = (X_1, Y_1) = (C_x^i - a/2, C_y^i - b/2), \\ V_2^i = (X_2, Y_2) = (C_x^i + a/2, C_y^i - b/2), \\ V_3^i = (X_3, Y_3) = (C_x^i + a/2, C_y^i + b/2), \\ V_4^i = (X_4, Y_4) = (C_x^i - a/2, C_y^i + b/2). \end{cases} \quad (2)$$

对于任意两个矩形工程板  $i$  和  $j$ ,  $i, j = 1,$

2, \cdots, m, i \neq j, 不重叠条件为

$$|C_x^i - C_x^j| \geq a. \tag{3}$$

$$|C_y^i - C_y^j| \geq b. \tag{4}$$

式(3)说明矩形工程板*i*和矩形工程板*j*不重叠的条件是两矩形工程板中心点之间的横向距离大于等于两者横向边之和的一半(见图1);式(4)说明矩形工程板*i*和矩形工程板*j*不重叠的条件是二者中心点之间的纵向距离大于等于两者纵向边之和的一半(见图2).

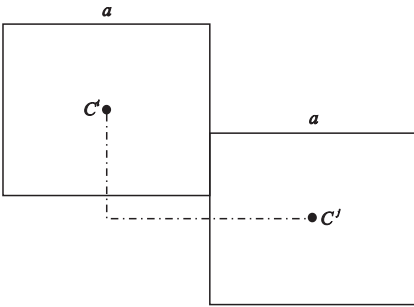


图1 横向不重叠边界条件  
Fig.1 Lateral non overlapping

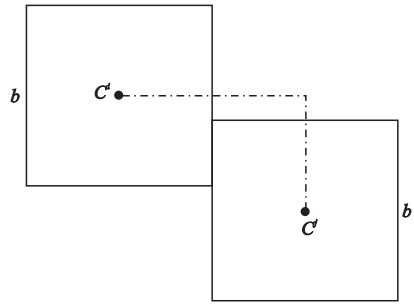


图2 纵向不重叠边界条件  
Fig.2 Longitudinal non overlapping

为了得到数学模型,需要将式(3)和式(4)转化为等式.将式(3)和式(4)的两侧分别平方,得到如下的不等式条件

$$(C_x^i - C_x^j)^2 \geq a^2. \tag{5}$$

$$(C_y^i - C_y^j)^2 \geq b^2. \tag{6}$$

将式(5)和式(6)变换为等式判别条件得<sup>[11]</sup>:

$$\max[0, a^2 - (C_x^i - C_x^j)^2] = 0. \tag{7}$$

$$\max[0, b^2 - (C_y^i - C_y^j)^2] = 0. \tag{8}$$

由式(7)和式(8),得到在该不规则凸域板材内两个矩形工程板不重叠的判断条件为

$$\max[0, a^2 - (C_x^i - C_x^j)^2]^2 \times \max[0, b^2 - (C_y^i - C_y^j)^2]^2 = 0. \tag{9}$$

式(9)给出了任意两个矩形工程板不重叠的条件.基于式(9),给出了式(10),用来判断*m*个矩形是否两两不重叠.

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \max[0, a^2 - (C_x^i - C_x^j)^2]^2 \times \max[0, b^2 - (C_y^i - C_y^j)^2]^2 = 0. \tag{10}$$

### 1.3 矩形工程板在不规则凸域板材内的条件

在不规则凸域板材Ω中排样*m*个矩形工程板,则矩形工程板必须在不规则凸域板材内部<sup>[12]</sup>.由凸域的性质可知,若矩形工程板的四个顶点都在不规则凸域板材内部,因此该矩形工程板必在不规则凸域板材内部.对于要排样的*m*个矩形工程板,第*i*个矩形工程板在不规则凸域板材Ω内部的条件为

$$\sum_{j=1}^N \{ \max[0, g_j(V_1^i)] + \max[0, g_j(V_2^i)] + \max[0, g_j(V_3^i)] + \max[0, g_j(V_4^i)] \} = 0. \tag{11}$$

式(11)为单个矩形工程板在不规则凸域板材Ω内部的判断条件,则*m*个矩形工程板全部在不规则凸域板材Ω内部的判断条件为

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N \{ \max[0, g_j(V_1^i)] + \max[0, g_j(V_2^i)] + \max[0, g_j(V_3^i)] + \max[0, g_j(V_4^i)] \} = 0. \tag{12}$$

### 1.4 数学模型的建立

由上述两个约束条件式得到在不规则凸域板材中单一尺寸矩形排样的无约束数学模型<sup>[13-15]</sup>:

$$f(C^1, C^2, \cdots, C^m) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \{ \max[0, a^2 - (C_x^i - C_x^j)^2]^2 \times \max[0, b^2 - (C_y^i - C_y^j)^2]^2 \} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N \{ \max[0, g_j(V_1^i)] + \max[0, g_j(V_2^i)] + \max[0, g_j(V_3^i)] + \max[0, g_j(V_4^i)] \}. \tag{13}$$

式中:决策变量  $C^1, C^2, \dots, C^m$  是排入的  $m$  个矩形工程板的中心点坐标.

1.5 求任意多边形面积的算法

为了评价排样方案的优劣,需要计算任意多边形板材的面积. 梯形法计算是一种快速计算任意多边形面积的算法<sup>[16]</sup>. 有一任意六边形(见图 3), 设其面积为  $S$ , 则:

$$S = S_{P_1P_1P_6P_5P_4P_4'} - S_{P_1P_1P_2P_3P_4P_4'} \tag{14}$$

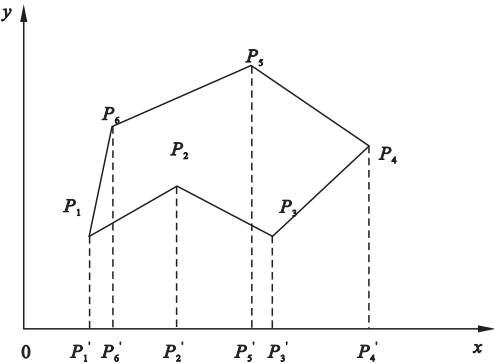


图 3 任意六边形

Fig. 3 Arbitrary polygon with six edges

由图 3 可得:

$$S_{P_1P_1P_6P_5P_4P_4'} = S_{P_1P_1P_6P_6'} + S_{P_6P_6P_5P_5'} + S_{P_5P_5P_4P_4'} \tag{15}$$

$$S_{P_1P_1P_2P_3P_4P_4'} = S_{P_1P_1P_2P_2'} + S_{P_2P_2P_3P_3'} + S_{P_3P_3P_4P_4'} \tag{16}$$

从式(15)和式(16)可以看出,梯形法计算多边形的面积,其实质就是把多边形的每条边与两端点到  $x$  轴投影线围成的梯形面积的计算. 对于任意一边  $P_iP_{i+1}$  有

$$S_{P_iP_iP_{i+1}P_{i+1}'} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1}). \tag{17}$$

此式是可正可负,当  $x_i > x_{i+1}$  时为正;当  $x_i < x_{i+1}$  时为负,因此该公式为有向梯形的面积计算公式. 设  $P_{n+1} = P_1$ , 顶点按照逆时针顺序排列,则面积为

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1}). \tag{18}$$

2 基于启发式搜索算法的数学模型求解

由于文中求解的是无约束最优化问

题<sup>[17]</sup>,可以利用启发式搜索算法<sup>[18]</sup>求解式(13)不规则凸域板材中单一尺寸矩形排样的数学模型.

对于不规则凸域板材的边界表示,利用石板视觉检测技术得到不规则凸域板材的边界坐标值如图 4 所示. 以不规则凸域板材内部能排放最多块数的矩形工程板为最优标准,由于满足“一刀切”的工艺要求,每次切割都是条带的切割<sup>[19]</sup>. 规定条带方向只能为  $x$  方向,条带宽度只可为矩形工程板宽度.

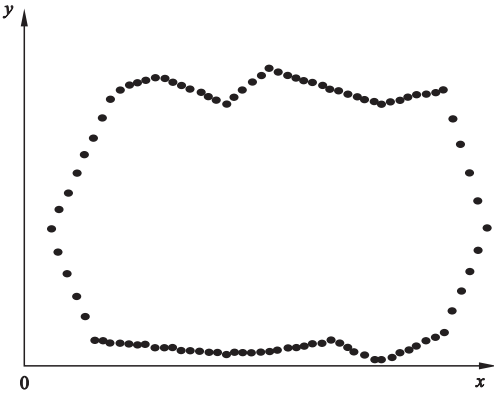


图 4 不规则石板的边界坐标

Fig. 4 Boundary coordinates of irregular slate

对于图 4 所示的多边形,将各个坐标点用线段连接起来,形成封闭的不规则图形,如图 5 所示. 利用线性插值,可以得到不规则图形边界上每一个点的坐标值<sup>[20]</sup>. 设定坐标系的精度为单位“1”,移动不规则图形使其最左侧的点的横坐标值是“1”的整数倍,矩形工程板的两边长也是单位“1”的整数倍.

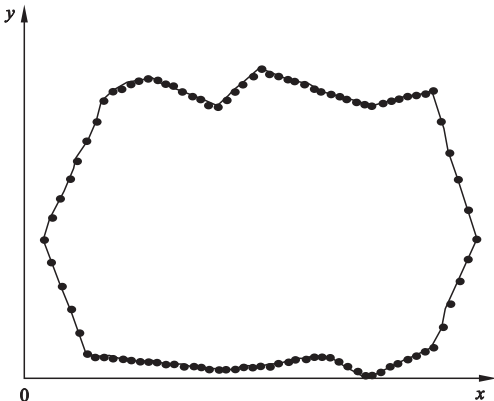


图 5 封闭的不规则石板

Fig. 5 Enclosed irregular slate

在启发式搜索算法中,将直线  $x=0$  按步长沿着  $x$  轴正方向移动,步长等于坐标系的精度单位“1”,移动的过程如图 6 所示.将直线移动至不规则多边形最左侧的点上,可以是一点,也可以是多个点.设此时直线和图形交点的横坐标为  $x_0$ ,直线所在的位置则为  $x=x_0$ .取直线  $x=x_0$  与不规则图形所有交点中纵坐标最大值和最小值两点,点的坐标分别记为  $(x_0, y_{0,\max})$  和  $(x_0, y_{0,\min})$ .按照步长向  $x$  轴正向移动,每次移动都按照上述方式记录两个点的坐标;直至直线移动至与不规则图形无交点处.设直线与不规则图形的交点个数为  $2N$  个,则最右侧的交点的横坐标为  $x_{N-1}$ ,两个交点的坐标分别为  $(x_{N-1}, y_{N-1,\max})$  和  $(x_{N-1}, y_{N-1,\min})$ .

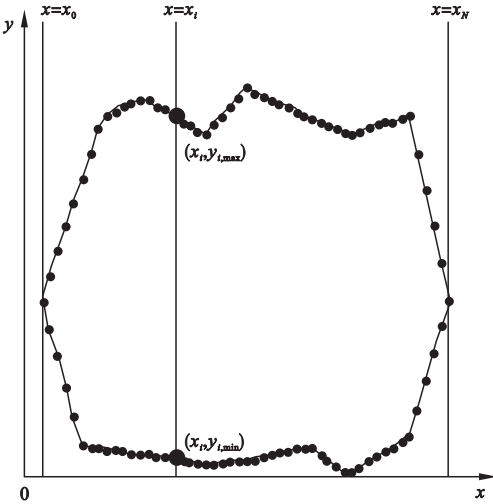


图 6 直线  $x=0$  的移动过程

Fig. 6 Moving process of line  $x=0$

根据上述的移动过程,记向量  $A = \{y_{0,\max}, y_{1,\max}, \dots, y_{N-1,\max}\}$ ,向量  $B = \{y_{0,\min}, y_{1,\min}, \dots, y_{N-1,\min}\}$ .当条带宽度为  $b$  时,求最优排样结果的步骤如下:

- (1) 设初始值  $t_1 = 1, t_2 = 1, k = 1$ ;
- (2) 对于向量  $A, B$ , 搜索下标在  $[t_1, t_{1+b}]$  范围内的元素.对于向量  $A$ ,取其中值最小的一个元素,记为  $A_{\min}$ ;对于向量  $B$ ,取其中值最大的一个元素,记为  $B_{\max}$ ;做差:  $C[k] = A_{\max} - B_{\min}$ ;则点集  $\{(x_t, B_{\min}), (x_{t+b},$

$B_{\min}), (x_{t+b}, A_{\max}), (x_t, A_{\max})\}$  形成一根条带的四个顶点;条带的长度为  $C[k]$ ,能容纳的矩形工程板的个数为  $f(k) = \text{int}(C[k]/a)$ ;

- (3) 若  $t_{1+b} > N$ ,转步骤(4);否则,  $t_1 = t_{1+1}; k = k + 1$ ,转步骤(2);

- (4) 将  $f(t_2), f(t_{2+b}) \dots$  相加,记  $h(t_2) = f(t_2) + f(t_{2+b}) \dots$ ;

- (5) 若  $t_2 > b$ ,转步骤(6);否则,  $t_2 = t_{2+1}$ ,转步骤(4);

- (6) 比较  $h(1), h(2), \dots, h(b)$ ;选择其中值最大的,其值为最优排样对应的矩形工程板的块数;对应的排样方法为最优的排放过程;排样结束.

搜索算法流程图如图 7 所示.

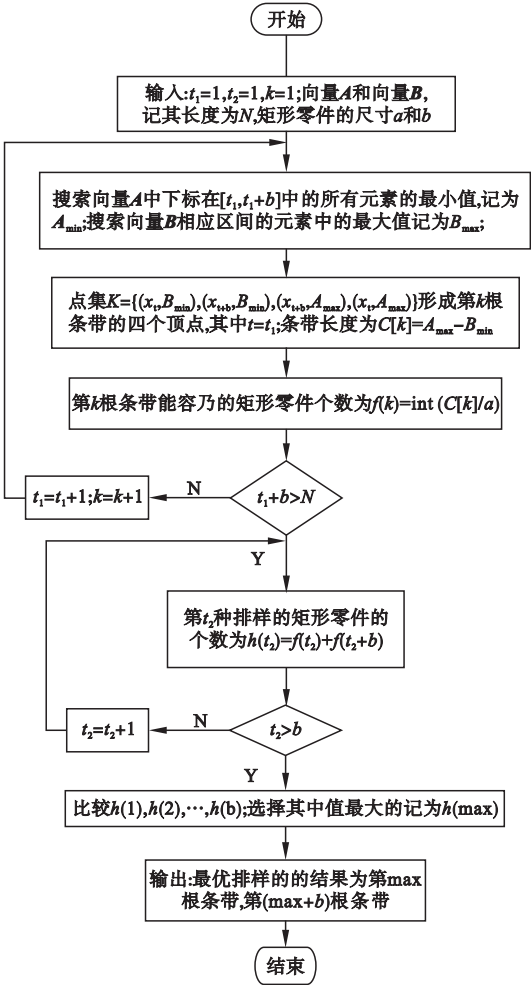


图 7 搜索算法流程图

Fig. 7 Search algorithm flow chart

3 算法实例

行单一尺寸矩形排样的实例数据如表 1 所示,实例结果如图 8 所示.

在三角形、凸四边形、凸五边形板材内进

表 1 实例数据

Table 1 Example data

板材	板材顶点坐标	板材 面积/ cm <sup>2</sup>	工程板 长 × 宽/ cm	工程板 面积/ cm <sup>2</sup>	板材 利用率/ %
三角形	{(0,0),(40,0),(20,20)}	400	3 × 2	6	84.0
凸四边形	{(0,0),(15,0),(18,12),(3,12)}	180	2 × 3	6	93.3
凸五边形	{(0,0),(21,0),(30,20),(6,30),(-4,20)}	720	4 × 3	12	83.3

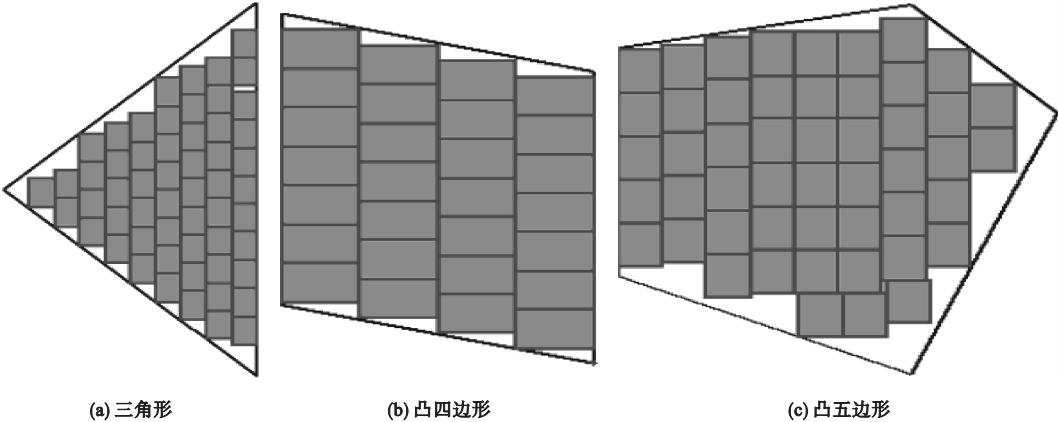


图 8 矩形工程板排样结果图

Fig. 8 Rectangular plate layout results

如表 1 数据所示,对于三角形、凸四边形、凸五边形板材,利用笔者的模型求解方法进行矩形工程板排样的板材利用率分别为 84.0%、93.3%、83.3%,与先求得多边形的最大内接矩形,然后利用动态规划算法得到的排样结果相比,有效地提高了不规则凸域板材的利用率.

4 结 论

- (1)建立不规则凸域板材中单一尺寸矩形排样数学模型,为后续的研究奠定了基础.
- (2)采用启发式搜索算法求解数学模型得到在不规则凸域板材中单一尺寸矩形排样的最优方案,通过几种典型的板材仿真实例测得不规则凸域板材利用率可以达到 83.3%~93.3%,提高了不规则凸域板材的

利用率.

参考文献

[ 1 ] 吴玉厚,吴岗,陆峰,等. 国内外异型石材机械的现状与发展趋势[J]. 石材,2008(3):22 – 25.  
(WU Yuhou,WU Gang,LU Feng, et al. Present situation and development trend of special shaped stone machinery at home and abroad [J]. Stone,2008(3):22 – 25. )

[ 2 ] 赵民,王若男,李洪飞,等. 基于 VC++ 矩形纹理石材排样系统[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版),2011,27(3):578 – 582.  
(ZHAO Min, WANG Ruonan, LI Hongfei, et al. Research on the layout system of rectangle texture stone based on VC++ [J]. Journal of Shenyang jianzhu university ( natural science ),2011,27 ( 3 ):578 – 582. )

[ 3 ] BIRGIN E G,LOBATO R D. Orthogonal packing of identical rectangles within isotropic convex regions[J]. Computers & industrial engi-



- neering, 2010, 59(4): 595 - 602.
- [4] 郭瑞峰, 叶艳. 改进的临界多边形生成算法[J]. 电子科技, 2014, 27(10): 107 - 110.  
(GUO Ruifeng, YE Yan. Improved algorithm for No-fit polygon calculation[J]. Electronic science and technology, 2014, 27(10): 107 - 110.)
  - [5] 顾振华, 何援军, 刘胡瑶. 二维不规则图形排料CAD系统的设计[J]. 工程图学学报, 2008, 29(2): 17 - 22.  
(GU Zhenhua, HE Yuanjun, LIU Huyao. The design of 2D irregular nesting CAD system[J]. Journal of graphics, 2008, 29(2): 17 - 22.)
  - [6] 刘胡瑶, 何援军. 基于重心 NFP 的二维不规则形状排样算法[J]. 中国机械工程, 2008, 18(6): 723 - 726.  
(LIU Huyao, HE Yuanjun. 2D Irregular nesting algorithm based on gravity center NFP[J]. China mechanical engineering, 2008, 18(6): 723 - 726.)
  - [7] BENNELL J, SCHEITHAUER G, STOYAN Y. Optimal clustering of a pair of irregular objects[J]. Journal of global optimization, 2015(61): 497 - 524.
  - [8] CASSIOLI A, LOCATELLI M. A heuristic approach for packing identical rectangles in convex regions[J]. Computers & operations research, 2011, 38(9): 1342 - 1350.
  - [9] 张国政, 杨海卉. 笛卡尔坐标系在数控机床中的应用[J]. 重庆科技学院学报(自然科学版), 2012(1): 121 - 125.  
(ZHANG Guozheng, YANG Haihui. System reliability evaluation of solid rocket motor ground testing and measuring[J]. Journal of Chongqing university of science and technology (natural sciences edition), 2012(1): 121 - 125.)
  - [10] CASSIOLI A, LOCATELLI M. A heuristic approach for packing identical rectangles in convex regions[J]. Computers & operations research, 2011(38): 1342 - 1350.
  - [11] 赵政宝, 楚纪正, 尚颖. 用于求解二维圆形排样问题的自适应混合算法[J]. 计算机工程, 2014, 38(8): 263 - 267.  
(ZHAO Zhengbao, CHU Jizheng, SHANG Ying. Adaptive hybrid algorithm for solving 2D circle packing problem[J]. Computer engineering, 2014, 38(8): 263 - 267.)
  - [12] 董秀山, 刘润涛. 判断点与简单多边形位置关系的新算法[J]. 计算机工程与应用, 2009(2): 185 - 187.  
(DONG Xiushang, LIU Runtao. New algorithm for determining position relation between simple polygon and point[J]. Computer engineering and application, 2009(2): 185 - 187.)
  - [13] CASTILLO I, KAMPAS F J, PINTÉR J D. Solving circle packing problems by global optimization: numerical results and industrial applications[J]. European Journal of operational research, 2008, 191(3): 786 - 802.
  - [14] HU Y, HASHIMOTO H, IMAHORI S, et al. Efficient implementations of construction heuristics for the rectilinear block packing problem[J]. Computers & operations research, 2015, 53: 206 - 222.
  - [15] 高蒙. 求解无约束最优化问题算法比较[J]. 市场周刊, 2014(5): 155 - 156, 126.  
(GAO Meng. Comparison of algorithms for solving unconstrained optimization problems[J]. Market weekly, 2014(5): 155 - 156, 126.)
  - [16] 卢齐飞, 唐平, 张光富, 等. 改进的遗传算法优化二维不规则图形排样[J]. 计算机工程与设计, 2013, 62(4): 1409 - 1414.  
(LU Qifei, TANG Ping, ZHANG Guangfu, et al. Improved genetic algorithm for two-dimensional irregular graph stock layout problem[J]. Computer engineering and design, 2013, 62(4): 1409 - 1414.)
  - [17] SATO A K, MARTINS T C, TSUZUKI M S G. An algorithm for the strip packing problem using collision free region and exact fitting placement[J]. Computer-aided design, 2012, 44(8): 766 - 777.
  - [18] CASTILLO I, KAMPAS F J. Solving circle packing problems by global optimization: Numerical results and industrial applications[J]. European journal of operational research, 2008(191): 786 - 802.
  - [19] GALIEV S I, LISAFINA M S. Linear models for the approximate solution of the problem of packing equal circles into a given domain[J]. European journal of operational research, 2013(230): 505 - 514.
  - [20] BIRGIN E G, GENTIL J M. New and improved results for packing identical unitary radius circles within triangles, rectangles and strips[J]. Computers & operations research, 2010(37): 1318 - 1327.